序

大家知道，曲线和曲面是几何学的研究对象，在中学数学教程中，学生学习了直线、圆、椭圆、抛物线、双曲线等比较简单的、很特殊的曲线，至于曲面，则根本不可能涉及．本书以曲面为主要讨论的内容，因此，本书的大部份内容是无法被中学生所接受的．与《走向数学》丛书的其他一些著作相比，本书必定会更多地失去了这一部分广大的读者，从这个意义上来说，作者只能深表歉意．

虽然如此，作者还是力图用最少的数学知识来阐明“计算机辅助几何设计”（英文缩写为CAGD）这一门崭新的学科，具体地说，只要学过单变量函数微分学的人，就可以读完本书的前4章，这对于了解CAGD的韵味已经足够；对一位懂得多变量函数微分学的读者来说，可以阅读全书而无困难．

CAGD这门新学科的发生和发展，它的内容、方法和意义，将在本书的第一章中详述．几何学里研究的曲面，大多数是业已存在的、古典的或著名的曲面；而CAGD则是讨论在计算机的帮助下如何去设计、去表示“自由型曲面”．所谓自由型曲面，是人们脑海里只有关于该曲面的大致构想，而无精确的数值定义，从而有着很大的任意性．这一点正是几何学与CAGD所研究的曲面的根本区别，由于研究对象的不同，研究方法上也有

VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

很大的差异.

在 CAGD 中，有一个很著名的方法，即 Bézier 方法，这个方法出现于本世纪 50 年代末期. 不久之后，人们发现它与古典的 Bernstein 多项式（1912 年）有十分密切的关系. Bernstein 多项式属于“函数逼近论”的范围，是一套很优美的数学. 自从它问世以来，理论上的研究长盛不衰，但是时隔半个世纪，人们还未能给它找到任何的数值应用. 当人们开始感到绝望的时候，Bézier 方法成了 CAGD 中的强大武器，这就给 Bernstein 多项式赋予了新的生命. 数学研究成果与其他学科互相渗透、互相促进的成功例子可以找到很多，作者认为，Bernstein 多项式理论与 CAGD 的发生和发展，是一个最新的、十分有说服力的生动例子，它表明了数学上的成就与工业技术革命的密切联系，简而言之，本书描述的是“从 Bernstein 到 Bézier”这一令人鼓舞的过程.

作者非常感谢以冯克勤教授为主编的《走向数学》丛书编委会，早在 1992 年他们就接纳了作者的这一选题. 由于种种原因，直到很晚才交稿. 我也应当感谢湖南教育出版社的欧阳维诚先生和孟实华女士，他们对我的拖拉一直抱着容忍和耐心的态度. 他们认真细致的编辑加工将为本书增色，作者愿以本书作为同他们长期以来友谊和合作的一项纪念.

作者也应当感谢美国杨伯翰大学（Brigham Young Univwsity）的 T. W. Sederberg 教授，因为他允许作者以他发表的图片作为本书的封面，图片中的一对电话话筒正是用 CAGD 的方法在计算机上生成的.

常庚哲

于中国科学技术大学

目　录

前言（王元） ………………………………………………… 1
序（常庚哲） ………………………………………………… 1

第一章　绪论 ………………………………………………… 1
第二章　多项式的 Bernstein 表示 ……………………………… 8
第三章　Bézier 曲线 ……………………………………… 32
第四章　有理 Bézier 曲线 ………………………………… 52
第五章　Bézier 三角曲面片 ……………………………… 70
第六章　三角域上的 Bernstein 多项式 ………………… 91
第七章　Bézier 三角曲面的正性 ……………………… 106
第八章　Bézier 三角曲面的凸性 ……………………… 125
第九章　Coons 曲面 ……………………………………… 154
文　献 ………………………………………………… 173

篇后记（冯克勤） ………………………………………… 177

第一章 绪 论

计算机辅助几何设计中的曲面

现代化的巨型喷气客机，是本世纪科技进步的伟大成就之一．乘坐这种客机，从世界的这一端到另一端，真正做到了“朝发而夕至”．现代的舰船虽然比不上飞机的快捷，但是它们的容量之巨大，足以把十几万吨甚至几十万吨的物资送到大洋的彼岸．人们尽情地享受着这些现代的物质文明，但是，除了参与设计和制造飞机或舰船的人们之外，很少有人能想像得到设计和生产这些庞然大物的工作的复杂和艰巨．

我们姑且撇开飞机和舰船的精密的发动机和内部各种复杂的油路、电路和管道不谈，单说它们的外形的制作，也就能看出其中的惊人的复杂性．

灯笼是我国人民传统的喜庆场合的装饰品．大家都知道灯笼是怎样制成的：工匠先用竹篾按照他心中想像的式样扎成一个架子，这个架子就是灯笼的骨架，骨架中间是许许多多的空洞．然后，工匠将彩色的纸或丝绸糊在这个架子上，再经过适

当的装璜和修饰，灯笼便制成了.

飞机、舰船的外形显然远比灯笼的外形复杂，体积也相当庞大，但是在制作骨架然后在骨架上蒙上“蒙皮”（飞机制造术语）这个过程上来说是一致的，设计一经确定之后，那许许多多的纵向与横向的骨架就得按照设计的要求准确地制作，骨架中间也有一个一个的空洞，在空洞上张上蒙皮才造成了飞机的外形. 张蒙皮的过程决不像糊灯笼那么便当，用来制作蒙皮的铝板是有一定的刚度的，不像纸和丝绸那么柔软，可以任人摆布，这就产生了将蒙皮按照骨架的形状“成型”的问题. 飞机的机舱内密布着各式各样的零件和管线，既要节省空间又要互不干涉，相互间的配合应当做到真正的“无毫发爽”. 飞机和舰船都是庞然大物，如果各种零部件在尺寸上不能做到协调一致，最后必然会出现完全装配不起来的局面.

为了保证达到互相协调的精度，在飞机制造工业中，多年来形成了一套严格的传统工艺，以五十年代前苏联的飞机工业为例，就建立了“模线—样板—标准样件工作法”的工艺流程，模线来自设计图纸，构成了整个工艺流程的最原始的依据. 为了保证精度，工艺规定：同一模线只能复制而不许重画；对称的曲线只画一半，另外对称的部份只能由反射产生；模线与机身上的曲线有相同的尺寸，因此绘制模线的车间必须十分宽敞；在绘制模线的时期，不得不从全国有关工厂调来大批熟练的技术人员，大兵团作战，从事好几个月的艰苦劳动. 根据模线制作样板，再根据样板制作标准样件，然后再制作各种形式的模胎和型胎，这中间的每一个环节上都包含着说不尽的艰难苦楚. 但是，这些工作并不是制造飞机的本身，只是制造用于制造飞机的工具，它们都属于“生产准备阶段”. 一般来说，在生产飞机的全过程中，生产准备阶段所占的时间，是整个过程的三分

之二. 如果要生产一种新型号的飞机，那么原来的“生产准备”必须全部报废，一切只能从零开始.

即使严格地执行上述工艺规程，到了最后的装配阶段，发生各种各样的不能协调的问题，也是屡见不鲜的事.

不难看出，问题的症结在于：在整个生产过程中，都是用实物来传递几何信息，由于在每一个环节上不可避免地会产生误差，加上环节众多，即使初始环节上只是“差之毫厘”，几经实物传递几何信息之后，误差的积累却可能使最后的结果“失之千里”. 存放模线、样板、标准样件这些实物，必须有大量的空间；而且它们往往受温度、湿度的影响，从它们中提取几何信息的时候将会因季节或时间的不同而产生差异.

舰船、汽车以及其他精密机械制造工业的生产过程及其弊端也大致如此.

多少年来，人们认识到要改变这种传统的工艺，最根本的出路在于要改“用实物传递几何信息”为“用数值来传递几何信息”. 因为后者既不受时间、气候的影响，提取信息时的结果也不会因人而异. 以造船工业为例，这种设想早在一百年前就开始了它的尝试，人们试图用简单的数学工具，例如圆弧、椭圆、双曲线和抛物线来表示船体上的曲线段，在造船工业中，这叫做“船体数学放样”，类似的工作在飞机制造业中，则称为建立“飞机外形的数学模型”. 这种努力一直未曾停止过.

只有当电子计算机技术取得突飞猛进的条件下，人们的上述愿望才能真正变为现实.

革命性的变化发生在本世纪的六十年代. 美国麻省理工学院的机械学教授 S. A. Coons 在 1967 年发表的题为《用于空间形式计算机辅助设计的曲面》的研究报告，奠定了日后被人们称之为“Coons 曲面”的数学基础. Coons 发展了 Hermite 离散

插值的方法，建立了“超限插值”的理论，后来被数学家用于求解某些具有任意边界条件的偏微分方程. 1962 年，在法国的雷诺汽车公司，开始使用了名为 UNISURF 的程序，旨在有助于汽车车身的设计和制造过程，这个程序的主持人便是工程师 P. Bézier 教授. UNISURF 程序赖以建立的 Bézier 方法，后来人们发现，乃是古典的 Bernstein 多项式. UNISURF 系统取得了极大的成功，可以说是彻底改变了汽车制造业的面貌，成功的要点在于，它将近代逼近理论与几何结合到这样一种程度：使得设计人员在计算机上操作起来，就象他使用自己的常规设计和作图工具一样得心应手. 由于他们的开创性的贡献，Coons 和 Bézier 被全世界公认为一个崭新的学科“计算机辅助几何设计”(英文为 Computer Aided Geometric Design，简称 CAGD) 的奠基人，享有全球性的声誉.

Coons 与 Bézier 都不是职业数学家，他们只是从工程的需要来探索新的方法，也许他们并未意识到与他们的方法紧密相关的 Hermite 插值或 Bernstein 多项式这些古典数学理论的存在，但是，他们的创造却给数学带来了新的思想和观念，前面已经提到 Coons 的超限插值思想对于偏微分方程论的影响，Bézier 的控制多边形和控制网的概念，导致了当今在多元样条插值中行之有效的“B-网理论”. 这两位先驱的工作很快地吸引了许多专业数学家卷入 CAGD 的研究，由于他们的参与，一方面使得 Coons 与 Bézier 的工作有了更坚实的数学基础；另一方面，由于他们的抽象、推广和扩展，使得在应用数学的花园中生长出新的花朵. 十几年来，本书的作者多次参加在国外举行的 CAGD 的国际会议，每一次这样的会议都是数学家、计算机科学家和工程师的和谐结合，而数学家在其中竟占了大多数. 数学家积极参与发展一门新的工程技术并且从中吸取营养来丰富

数学本身，CAGD 提供了一个极为成功的范例.

在早期，这门新的技术被人们称之为“计算几何”，英国学者 A. R. Forrest 对它作了如下的界定：“对几何外形信息的计算机表示、分析和综合”(1971 年). 1974 年，在美国的 Utah 大学，由两位数学家 R. E. Barnhill 和 R. F. Riesenfeld 主持召开了第一次国际 CAGD 会议，才定名为“计算机辅助几何设计”. 1984 年，与此同名的国际刊物创刊，主编是 Barnhill 与德国数学家 W. Boehm. 稍后，对 CAGD 的公认定义是：“在计算机图象仪的环境中曲面的表示与逼近”. “计算几何”一词，则留给了研究几何图形的计算复杂性的另一门学科.

解析几何、微分几何的研究对象是曲线和曲面. 解析几何主要研究的是二次曲线和曲面；微分几何也讨论一些具体的曲面，但更多地是探索曲面的几何性质，包括刻划出完全确定一张曲面的几何量. CAGD 主要是研究如何表示（或曰“设计”）所谓“自由型曲面”. 为了解释什么是自由型曲面，设想有十位汽车设计师，我们请他们来设计最新型的小汽车，那一定会有十种不同的设计方案，因为他们心中有自己的美学原则，就是对同一设计师而言，他的设计也有相当大的任意性. 在计算机图象仪的环境中，使用给定的设计系统，设计师按照他设计的方案输入一定的数据和几何参数，在屏幕上便会快速地出现相应的汽车外形. 如果他不满意这一外形，他便可以调整若干几何参数，甚至可以全盘推翻原来的方案，屏幕上随之显示出新的外形. 将这一过程反复几次，直到这个设计师完全满意为止. 有了一个优良的设计系统，例如 UNISURF，一个有经验的设计师，只须通过为数不多的几次反复，就可以达到自己的目的. 设计一旦完成，车身曲面便储存于计算机之中，人们便可以根据需要提取几何信息，包括通过由计算机驱动的绘图机输出图纸，

以及由数控机床直接加工零部件.

编制这种设计系统，就得依靠表示自由型曲面的数学方法；而提出这种数学方法必须考虑到计算量尽可能地少，计算稳定可靠，还得考虑使用者（设计师）的方便. 须知，这类使用者通常不具备高深的数学知识，数学知识必需被巧妙地隐藏起来，让使用者觉得他们操作这个系统时比他们使用常规设计工具时更加直观、更加方便.

CAGD 所涉及的数学，主要有微分几何、代数几何、函数逼近论和计算数学. 除数学之外，它还与计算机科学特别是其中的计算机图形学有着密切的联系.

为了与《走向数学》丛书的宗旨一致，本书将着重讨论 CAGD 中的数学方法而不是它在工程技术中的应用. 在当今，CAGD 的运用已远不只是精密机械制造行业，它已被运用到地质学（如探矿、采油）、医学（如动态模拟心脏的跳动）、轻工业（如鞋帽、服装的设计和制作）、建筑业以及艺术领域（如计算机动画），当然，在适当的地方，我们将提及它的应用，以便读者体会到 CAGD 作为一个新兴的边缘应用学科的特殊的韵味.

本书将着重讨论 Coons 曲面和 Bézier 曲面，而不讨论 CAGD 中另一重要的曲面技术——样条曲面. 有统计数据表明，在近代的 CAGD 文献中，有四分之三的文章涉及 Bézier 的名字. 由于这一事实，也由于作者偏爱自己的主要研究方向，本书又将更加重视 Bézier 曲面. 即使这样，在浩瀚的材料和有限的篇幅之间，作者不得不作出慎重的选择. 选择的原则是，本书所包含的内容必需是基本的、重要的，是能够用大学一、二年级数学来处理的，它们应当是简洁的、优美的，能给读者带来某种美的享受.

如果读者拥有一台个人电脑和相应的绘图软件，他就可以按照本书中提供的方法显示出或者绘制出各种曲线和曲面．本书中大部份图形，就是由正在中国科学技术大学数学系攻读博士学位的丁友东同志用电脑制作的．他还仔细地阅读了全部手稿，提出了许多中肯的改进意见，作者十分感谢他的协助．

第二章　多项式的 Bernstein 表示

要讲述曲面，得首先谈谈曲线.

在各式各样的曲线中，多项式曲线是最简单的一种.

用 $\mathscr{P}_n$ 来记不超过 n 次的多项式全体和零所组成的线性空间，这里 n 属于自然数的集合 $\mathscr{N}$. 既然 $\mathscr{P}_n$ 是一个 $n+1$ 维的线性空间，它可以有各色各样的基底，最常见的是由 $1, x, \cdots, x^n$ 组成的基底，在计算机辅助几何设计（CAGD）中，另一种很有价值的基底是

$$B_i^n(x) := \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \tag{1}$$

这里

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-1)!}, \qquad i = 0,1,2,\cdots,n,$$

是组合数.（1）称为 **Bernstein 基函数**，因为它与所谓的 **Bernstein 多项式**有密切的关系，对每一个 $p \in \mathscr{P}_n$，都可以唯一地确定实数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 使得

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i B_i^n(x) \tag{2}$$

式(2)的右边称为 p 的 **Bernstein 表示**，而 a_i，$i=0$，1，…，n，叫做 p 的 **Bernstein 系数**，记作

$$p = (a_0, a_1, \cdots, a_n)$$

在下面几节中，我们将看到这种表示多项式的方法究竟有什么好处.

由于我们今后只关心多项式在闭区间 $[0, 1]$ 上的行为，因此总是设 $x \in [0, 1]$.

Bernstein 基函数有如下重要的性质：

1. 在 $[0, 1]$ 上，我们有 $B_i^n(x) \geqslant 0$，$i=0, 1, \cdots, n$;

2. $\sum_{i=0}^{n} B_i^n(x) = 1$.

第一条性质是很明白的，第二条性质来自二项式展开

$$\sum_{i=0}^{n} B_i^n(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} = [(1-x)+x]^n = 1.$$

§1　控制多边形

我们先来看看把一个多项式 p 表成 Bernstein 形式有什么好处，设 $p = (a_0, a_1, \cdots, a_n)$. 如果每一个 $a_i \geqslant 0$，由(2)和性质1可知，$p(x) \geqslant 0$ 对 $x \in [0,1]$ 均成立，利用基函数的两条性质也可得知

$$\min(a_0, a_1, \cdots, a_n) \leqslant p(x) \leqslant \max(a_0, a_1, \cdots, a_n)$$

对一切 $x \in [0,1]$ 成立，这就是说，从其 Bernstein 表示的系数中，就可以定出 p 在 $[0,1]$ 上的下界与上界，尽管这些界也许是很粗略的. 为了获得更详尽的信息，我们在这里引入**控制多**

边形的概念.

把两点$\left(\frac{i-1}{n},\ a_{i-1}\right)$，$\left(\frac{i}{n},\ a_i\right)$，$i=1, 2, \cdots, n$，用直线段连接起来，得到一条定义于 $[0, 1]$ 上的由 n 段直线组成的连续的分段线性函数，记为 $\hat{p}$，称之为 p 的控制多边形，这与平面几何中多边形的概念是全然不同的，因为 $\hat{p}$ 不是一个封闭的图形. 控制多边形是过去的逼近论专家未曾注意过的，它来自于 Bézier 方法，后来又引伸为 B-网，成了现代多元逼近理论中很有力的工具.

考察 p 与 $\hat{p}$ 之间的几何关联是十分有趣和有益的. 图 2.1 显示了一个 4 次多项式及其对应的控制多边形.

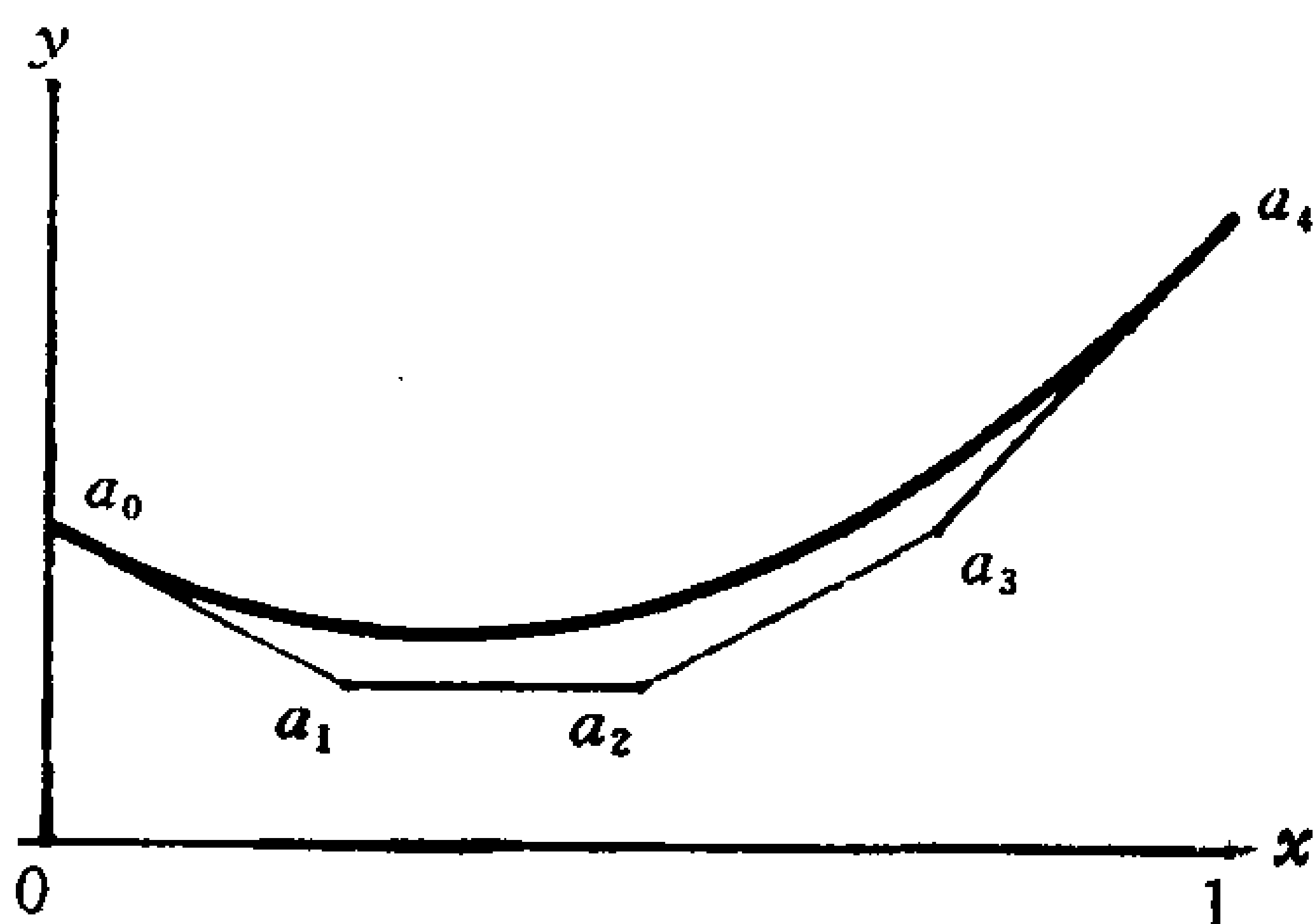


图 2.1 控制多边形

为了计算的方便，我们将（2）的右边用算子来表示.

引入**移位算子** E 如下：

$$Ea_i := a_{i+1}, \qquad i = 0, 1, \cdots, n-1.$$

通过 $E^2a_i = E(Ea_i) = Ea_{i+1} = a_{i+2}$ 等等来定义算子 E 的方幂. 容易看出 $a_i = E^ia_0$，$i=0, 1, \cdots, n$. 这里 E^0 表示恒等算子 I，即 $Ia_i = a_i$. 在算子乘积的意义之下，I 与 E 是可交换的：

$$(IE)a_i = I(Ea_i) = Ia_{i+1} = a_{i+1}$$

$$= E(a_i) = E(Ia_i) = (EI)a_i,$$

即 $IE=EI$. 利用二项式展开，(2) 的右边可以写成

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}E^ia_0$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}[(1-x)I]^{n-i}(xE)^ia_0$$

$$= [(1-x)I + xE]^n a_0,$$

也就是说，(2) 可以改写为

$$p(x) = [(1-x)I + xE]^n a_0. \tag{3}$$

有了这个公式，我们立刻算出

$$p(0) = I^n a_0 = a_0,$$

$$p(1) = E^n a_0 = a_n.$$

这两个式子表明，p 的曲线与其控制多边形 $\hat{p}$ 有相同的起点与终点，或者说 p 插值于 $\hat{p}$ 的两个相应的端点.

注意，算子 $E-I$ 正好是向前差分算子，通常记为 Δ，即 $\Delta=E-I$. 在 (3) 的双方对 x 求导，可得 $p'(x) = n[(1-x)I + xE]^{n-1}(E-I)a_0$，于是

$$p'(x) = n[(1-x)I + xE]^{n-1}\Delta a_0, \tag{4}$$

这就是说，p' 除了一个常数因子 n 之外，是一个 $n-1$ 次的 Bernstein 形式. 再在 (4) 式双方对 x 求导，得出

$$p''(x) = n(n-1)[(1-x)I + xE]^{n-2}\Delta^2 a_0, \tag{5}$$

这里 Δ^2 是二阶向前差分算子. 在有需要的情况下，可以仿此计算高阶导数.

我们现在来看一看由 (4) 与 (5) 能导出怎样的一些结论. 如果 $\hat{p}$ 在 $[0, 1]$ 上是单调上升的函数，那么 $\Delta a_i \geqslant 0$，$i=0, 1, \cdots, n-1$，这时 (4) 式的右边将有非负的系数，因此 $p'(x) \geqslant 0$ 对 $x \in [0,1]$ 成立，从而 $p(x)$ 是单调上升的，这就是说，如

果 $\hat{p}$ 是单调上升（下降）的，那么 p 也将是单调上升（下降）的.

接着我们来讨论**凸性**. 定义在 $[0,1]$ 上的函数 f 叫做 $[0,1]$ 上的**凸函数**，或者说 f 在 $[0,1]$ 上是**凸的**，是指对于任何 $x_1,x_2 \in [0,1]$ 及任何实数 $\lambda \in [0,1]$ 总成立着不等式

$$f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2) \leqslant (1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2). \tag{6}$$

这一不等式的几何意义是：连接曲线 $y=f(x)$ 上任何两点的直线段都不会落到对应曲线的下方（见图 2.2）.

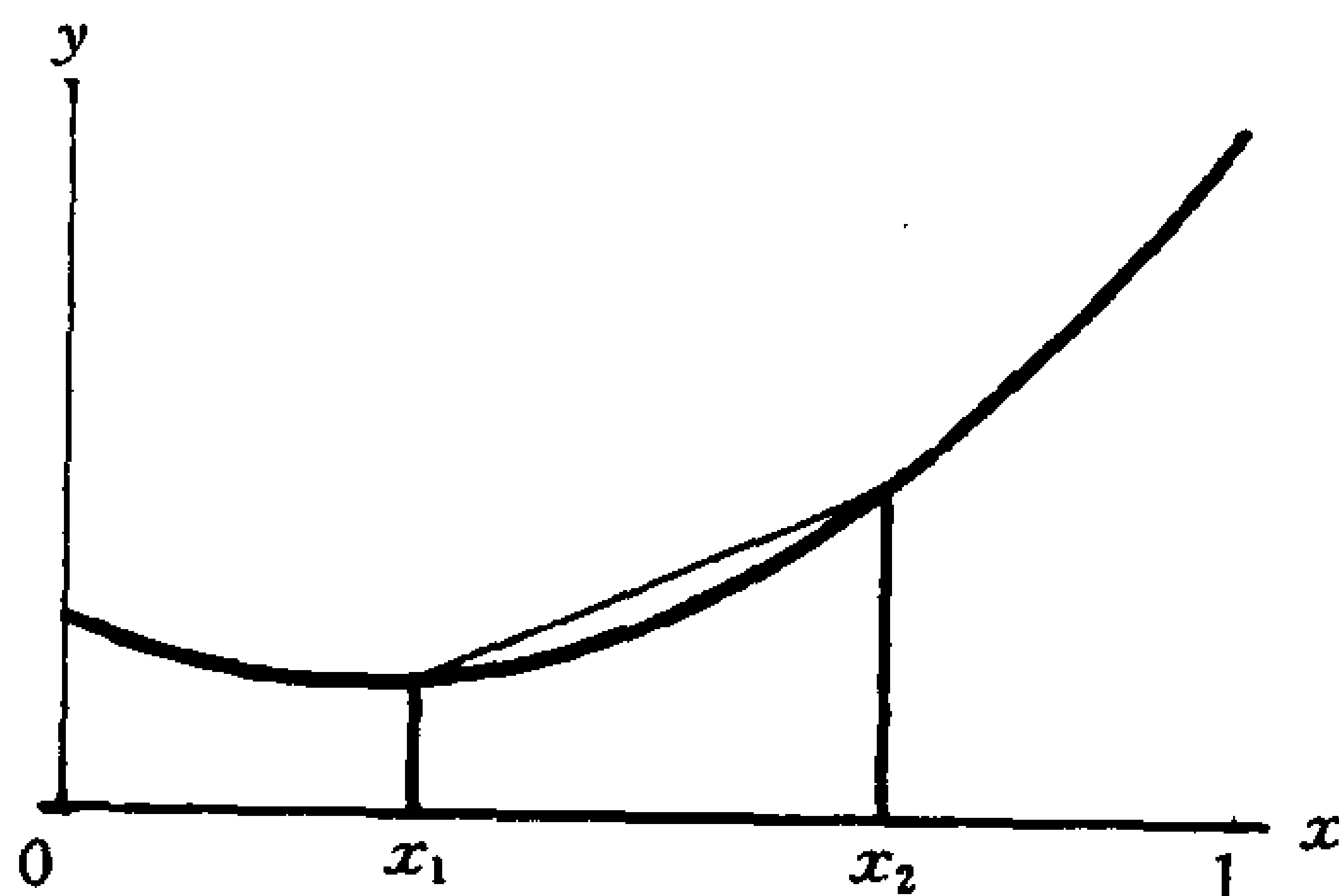


图 2.2 凸函数

不难证明，对于控制多边形 $\hat{p}$，它的凸性由下面的一组不等式来刻划

$$\Delta^2 a_i = a_{i+2} - 2a_{i+1} + a_i \geqslant 0,$$

其中 $i=0, 1, \cdots, n-2$. 若 f 是 $[0,1]$ 上二阶可微的函数，由微积分的定理可知，f 的凸性等价于 f'' 的非负性，即 $f''(x) \geqslant 0$ 对 $x \in [0,1]$ 成立.

由以上二点说明以及公式 (5) 立即可知，如果控制多边形 $\hat{p}$ 是凸的，那么由它所确定的多项式 p 在 $[0,1]$ 上也是凸的.

在 (4) 中分别令 $x=0$ 与 $x=1$，我们得到

$$p'(0) = n\Delta a_0 = n(a_1 - a_0),$$

$$p'(1) = n\Delta a_{n-1} = n(a_n - a_{n-1}).$$

这两个等式的几何意义是，曲线 p 在两个端点处分别与控制多边形的第一条边与最后一条边相切（见图 2.1）. 从图上看，控制多边形与对应曲线十分"神似".

利用控制多边形的几何性质，可以很方便地计算**三次 Hermite 两点插值的基函数** F_0, F_1, G_0, G_1，它们都是三次函数，并且满足

$$F_0(0) = 1, F_0(1) = 0, F_0'(0) = 0, F_0'(1) = 0,$$
$$F_1(0) = 0, F_1(1) = 1, F_1'(0) = 0, F_1'(1) = 0,$$
$$G_0(0) = 0, G_0(1) = 0, G_0'(0) = 1, G_0'(1) = 0,$$
$$G_1(0) = 0, G_1(1) = 0, G_1'(0) = 0, G_1'(1) = 1.$$

首先计算 F_0，设 $F_0 = (a_0, a_1, a_2, a_3)$. 由端点的插值性立知 $a_0 = 1$，$a_3 = 0$，由于 F_0 在 0 与 1 上的导数等于零，可知控制多边形的第一边与第三边必须平行于横轴，因此 $a_1 = a_0 = 1$，$a_2 = a_3 = 0$，从而

$$F_0(x) = B_0^3(x) + B_1^3(x) = 1 - 3x^2 + 2x^3.$$

同样的思考导出 $F_1 = (0, 0, 1, 1)$，所以

$$F_1(x) = 1 - F_0(x) = 3x^2 - 2x^3.$$

用类似的方法可以定出

$$G_0 = (0, 1/3, 0, 0),$$
$$G_1 = (0, 0, -1/3, 0).$$

为了第九章的需要，我们把这四个多项式写在一起

$$\left.\begin{aligned} F_0(x) &= 1 - 3x^2 + 2x^3, \\ F_1(x) &= 3x^2 - 2x^3, \\ G_0(x) &= x - 2x^2 + x^3, \\ G_1(x) &= -x^2 + x^3. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

F_0，F_1，G_0，G_1 的图象及其对应的控制多边形依次画在图 2.3

之中.

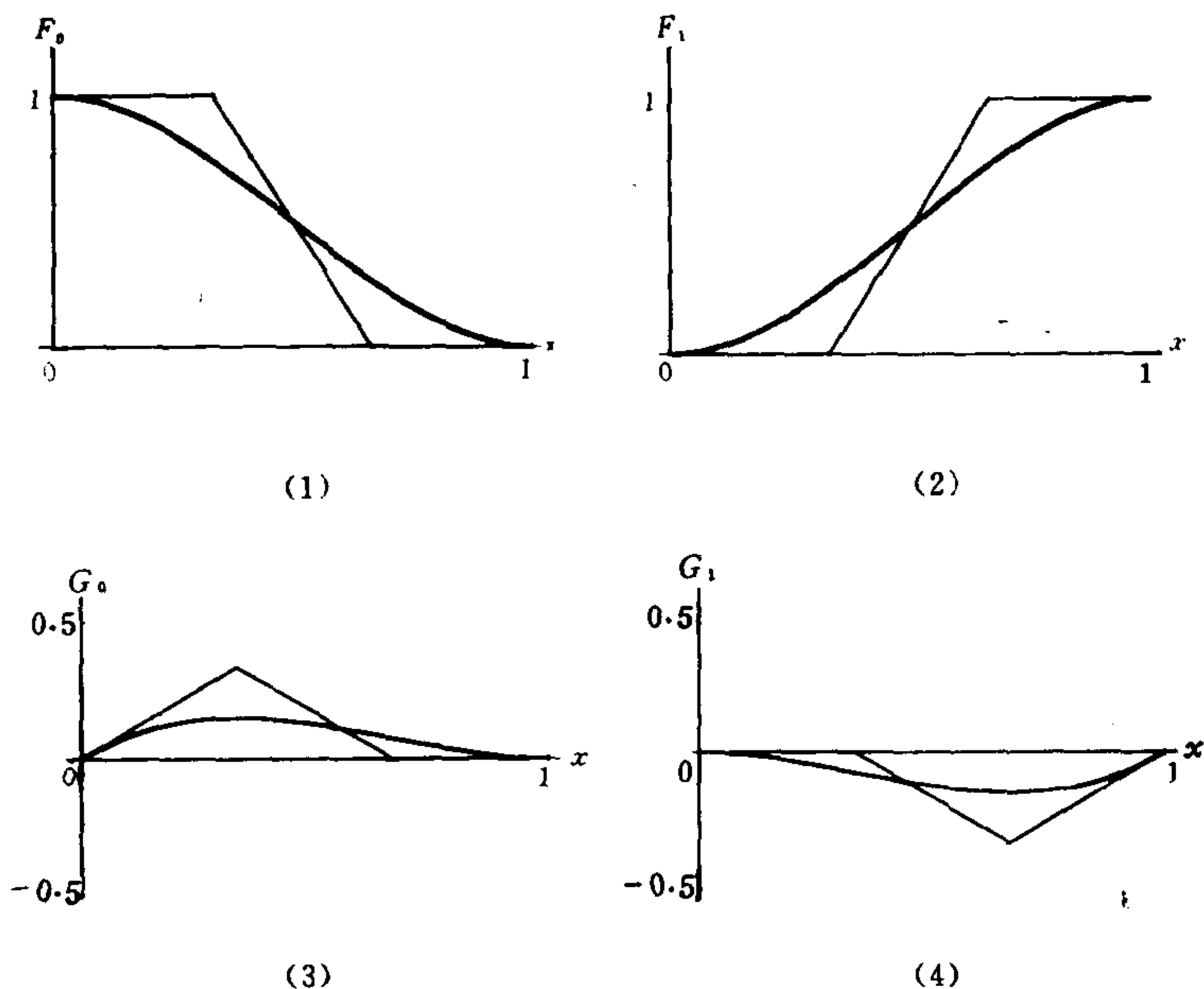


图 2.3 三次 Hermite 插值基函数

§2 多项式的正性与凸性

设函数 f: $[0, 1] \to \boldsymbol{R}$，这里 $\boldsymbol{R}$ 表示实数集. 如果 $f(x) \geqslant 0(>0)$ 对一切 $x \in [0,1]$，则称 f 在 $[0,1]$ 上是**正(严格正)的函数**，或者说 f 在 $[0,1]$ 上具有**正(严格正)性**.

设多项式 p 有 Bernstein 表示 $p=(a_0, a_1, \cdots, a_n)$. 在 CAGD 中，通过 Bernstein 系数来刻划 p 的正(严格正)性是很重要的，前面已指出，如果一切 Bernstein 系数均为正，则 p 在 $[0,1]$ 上

有严格正性. 但这远非严格正性的必要条件，只有在 $n=1$ 的情形，即当 $p=(a_0,a_1)$ 时，p 的严格正性等价于 $a_0>0$ 及 $a_1>0$.

我们来讨论 $n=2$ 的情况.

定理 2.1 设 $p=(a_0,a_1,a_2)$，p 在$[0,1]$上为严格正的必要充分条件是

$$a_0>0,a_2>0,a_1+\sqrt{a_0a_2}>0. \tag{8}$$

证明 设 p 在$[0,1]$上是严格正的，必有

$$a_0=p(0)>0,a_2=p(1)>0$$

这样，可把 p 改写为

$$p(x)=[\sqrt{a_0}(1-x)-\sqrt{a_2}x]^2$$

$$+2(a_1+\sqrt{a_0a_2})x(1-x),$$

由此立见条件（8）保证了 p 的严格正性.

现在来证必要性，令

$$x*=\frac{\sqrt{a_0}}{\sqrt{a_0}+\sqrt{a_2}},$$

显然 $0<x*<1$. 将 $x*$ 代入 p，得到

$$p(x*)=2(a_1+\sqrt{a_0a_2})x*(1-x*).$$

由 $p(x*)>0$ 推知 $a_1+\sqrt{a_0a_2}>0$. 证完.

如果讨论正性，只须将（8）中的严格不等号改为“$\geq$”，定理 2.1 依然成立.

对于三次多项式，也可以建立由它的 Bernstein 系数来表示正性的必要充分条件，由于结果比较繁琐，我们不在此列举.

虽然控制多边形的凸性保证了其对应多项式的凸性，但这

同样也不是多项式凸性的必要条件，对于多项式函数 p，它的凸性可以由 p'' 的正性来检定. 所以说，凸性的研究就转化为对次数下降两次的另一多项式的正性的研究. 容易证明，对于次数不高于三次的多项式，其凸性等价于对应的控制多边形的凸性，但是，对 4 次或高于 4 次的多项式，情形就大不相同，也就是说，一个不凸的控制多边形可能产生凸的多项式.

例 1 考察 4 次多项式 $p=(1,0,\varepsilon,0,1)$ 的凸性，其中 ε 是一个可变的实数.

解 如果忽略正的因子 12，p'' 是下列的二次多项式 $(1+\varepsilon,-2\varepsilon,1+\varepsilon)$，由定理 2.1 可知 p''在 $[0,1]$ 上为正当且只当

$$1+\varepsilon\geqslant 0, 1-\varepsilon\geqslant 0.$$

这就是说当且只当 $|\varepsilon|\leqslant 1$ 时，多项式 p 在 $[0,1]$ 上是凸的，注意，当 $0<\varepsilon\leqslant 1$ 时，控制多边形有英文字母 W 的形状，不是凸的，但它仍产生凸的函数，图 2.4 画出了 $\varepsilon=1$ 的不凸的控制多边形与对应的凸曲线.

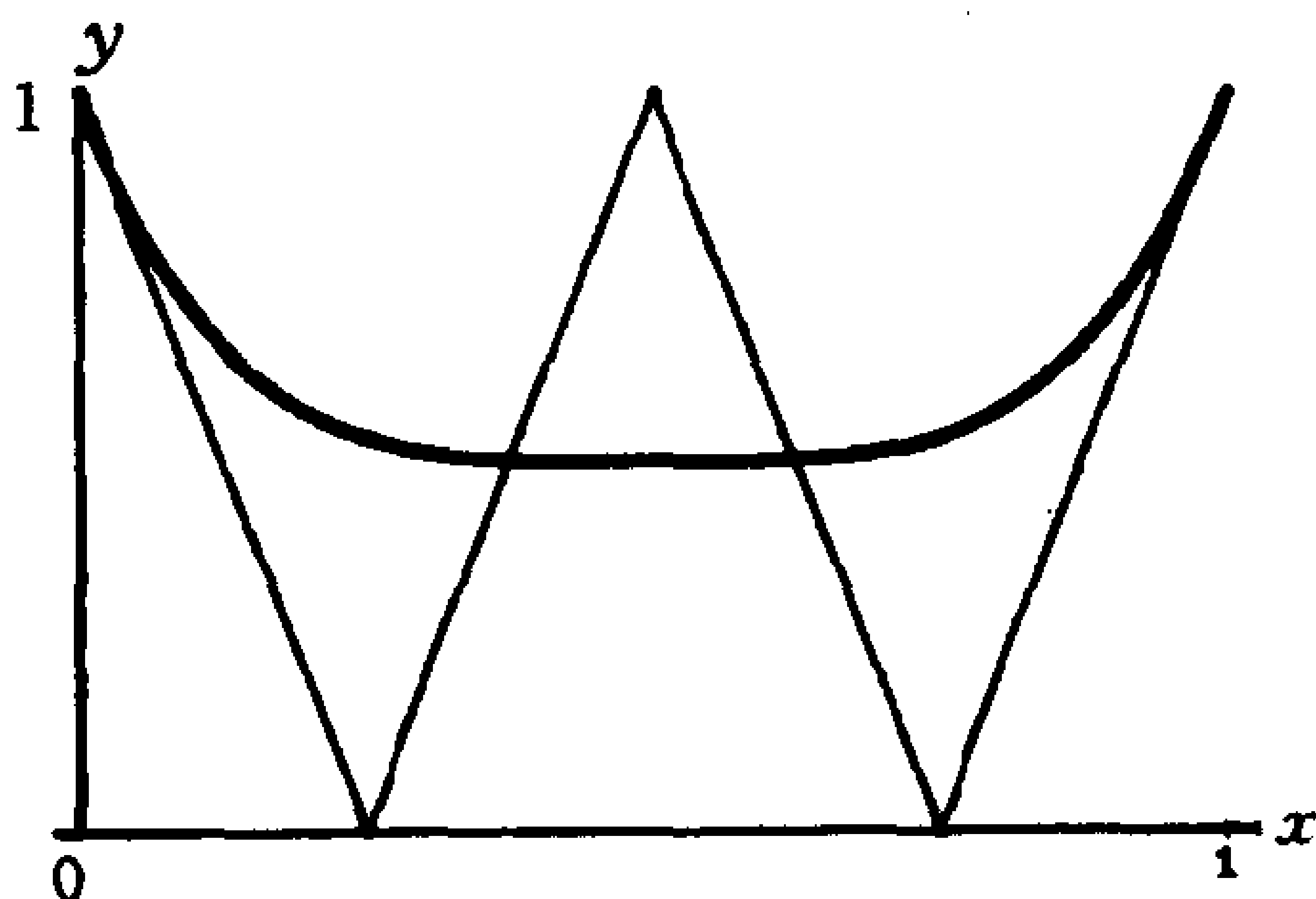


图 2.4 不凸的多边形可产生凸曲线

§3 升阶

任何一个 n 次多项式总可以形式地写为一个 $n+1$ 次的多项式，设 $p=(a_0,a_1,\cdots,a_n)$，我们打算把 p 表为高一次的 Bernstein 形式

$$p=(a_0*,a_1*,\cdots,a_n*,a_{n+1}*),$$

问新的 Bernstein 系数怎样经由旧的 Bernstein 系数计算出来？

我们有

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{i=0}^{n} a_i B_i^n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i B_i^n(x)[(1-x)+x] \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i (1-x) B_i^n(x) + \sum_{i=0}^{n} a_i x B_i^n(x), \end{aligned}$$

直接计算可知

$$(1-x)B_i^n(x) = \frac{n+1-i}{n+1} B_i^{n+1}(x),$$

$$xB_i^n(x) = \frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(x),$$

从而

$$\begin{aligned} p(x) = &\sum_{i=0}^{n} \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) a_i B_i^{n+1}(x) \\ &+ \sum_{i=0}^{n} \frac{i+1}{n+1} a_i B_{i+1}^{n+1}(x). \end{aligned}$$

注意，上式右边的第一个求和的范围可以延伸到 $i=n+1$，因为这时不过是添加了一个等于零的项；而第二个和式当其指标 i 被 $i-1$ 来代替之后，等于

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{i}{n+1} a_{i-1} B_i^{n+1}(x),$$

最后一式中的指标 i 也可以从零开始，因为对应的加项中有一个因子为零，总起来说

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n+1}\left[\frac{i}{n+1}a_{i-1}+\left(1-\frac{i}{n+1}\right)a_i\right]B_i^{n+1}(x),$$

这是一个 $n+1$ 次的 Bernstein 形式，于是，这就回答了前边提出的问题，新的 Bernstein 系数是

$$a_i^*:=\frac{i}{n+1}a_{i-1}+\left(1-\frac{i}{n+1}\right)a_i, \tag{9}$$

其中 $i=0,1,2,\cdots,n+1$，使用（9）时，a_{-1}与 a_{n+1}应理解为零，也就是说 $a_0^*=a_0$，$a_{n+1}^*=a_n$.

新的 Bernstein 系数决定了一个有着 $n+1$ 条边的控制多边形，但它与原先只有 n 边的控制多边形对应着同一条多项式曲线，图 2.5 中表示出两个不同的控制多边形决定着同一条三次多项式曲线.

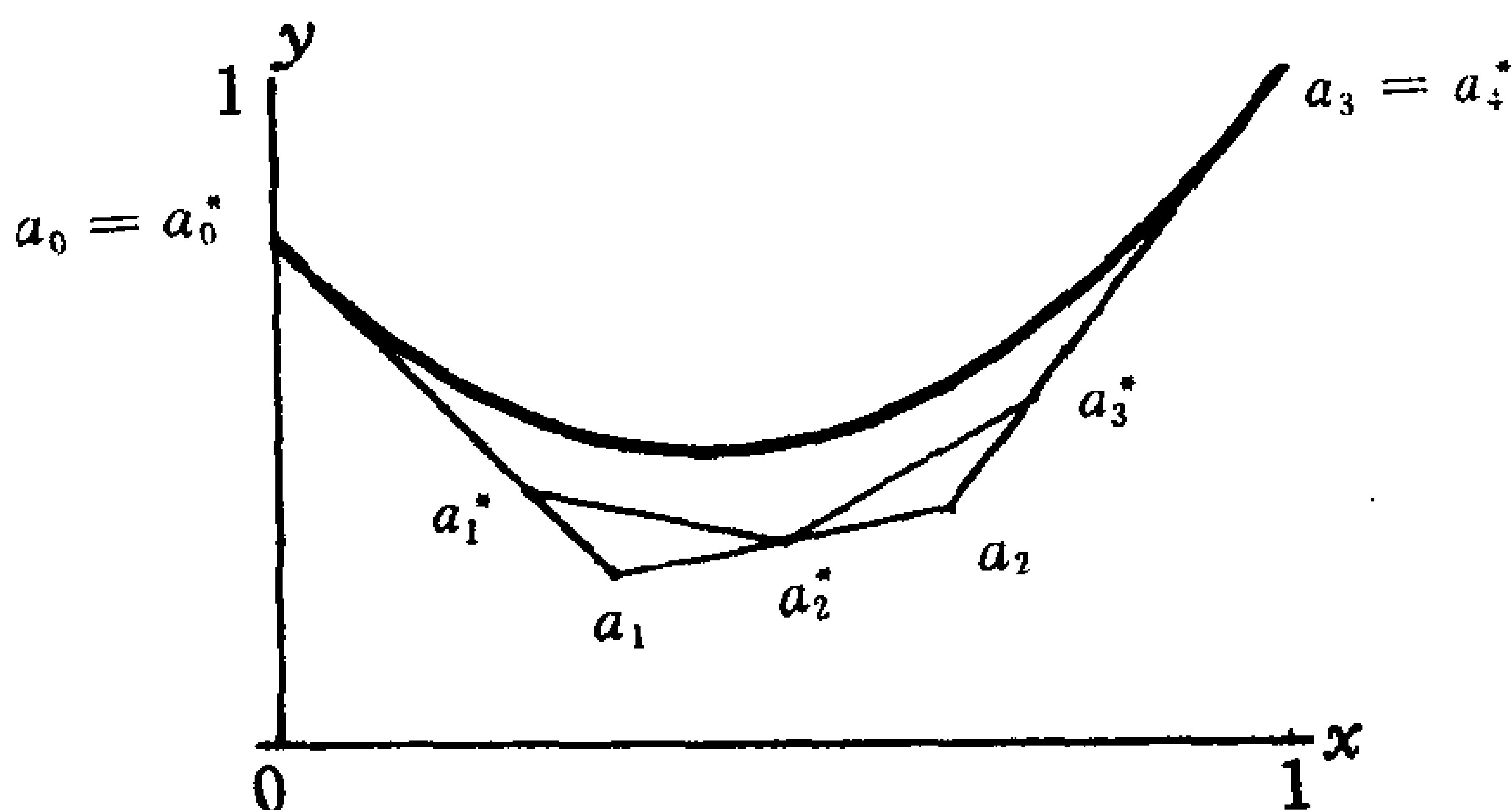


图 2.5 控制多边形的升阶

由（9）定义的过程称为**升阶**，指的是把一个 n 次的多项式的 Bernstein 形式恒等地变形为 $n+1$ 次的 Bernstein 形式，新的多边形叫做**升阶多边形**. 升阶可以一次又一次地反复进行下去，

因此伴随而来的是由升阶多边形组成的序列，当升阶过程无止境地反复作下去时，这个序列有怎样的动向？下列定理给出了这个问题的回答.

定理 2.2 （G. Farin）由反复进行升阶操作而产生的控制多边形序列在 [0,1] 上一致地收敛到它们所决定的多项式曲线.

在这里我们不来证明这个定理，因为在第五章中对曲面的情况将有一个严格的证明，定理 2.2 只不过是那里的定理的一个退化情况. 我们打算谈谈定理 2.2（**升阶收敛定理**）的意义，由公式（9）可以见到，a_i^* 是 a_{i-1} 和 a_i 的凸线性组合，计算 a_i^* 的算法是稳定的. 从几何上来看，升阶不过是反复地进行线性插值（解析几何中叫“定比分点”）这一种简单的操作. 升阶收敛定理是说，只要反复进行这一简单而稳定的操作的次数足够多，所得到的升阶多边形将是多项式曲线整体上的很好的近似. 因此，有理由相信，对升阶多边形的正性作出判断，可以改进判断多项式曲线的严格正性的方法.

定理 2.3 多项式 p 在 [0,1] 上恒取正值的必要充分条件是：存在一个升阶控制多边形，使得它以及以后的升阶多边形在 [0,1] 上有严格正性.

证明 充分性是显而易见的.

余下来只需证明必要性，设 p 在 [0,1] 上有严格正性，因此多项式 p 在闭区间 [0,1] 上有正的最小值 $m>0$. 对于 $\frac{m}{2}>0$ 而言，由定理 2.2 可知，在升阶控制多边形序列中，从某一项

起的升阶多边形在 $[0,1]$ 上将 $\geqslant m/2>0$. 证完.

注意：在定理 2.3 中，不可将严格正性改为正性，否则会得出不正确的结论，这可从下列的反例看出：考虑二次多项式 $p=(1,-1,1)$，事实上 $p(x)=1-4x(1-x)\geqslant 0$ 对于 $x\in[0,1]$ 成立. 但是，不论把升阶进行多少次，在每一个阶段总会有负的系数，也就是说，任何升阶控制多边形都不是正的. 请读者自行证明之.

§4 Bernstein 多项式

设 $f:[0,1]\to\boldsymbol{R}$. 对于任意的 $n\in\mathcal{N}$，定义多项式

$$B^n(f;x):=\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)B_i^n(x), \tag{10}$$

称它为 **f 的 n 次 Bernstein 多项式**，这种多项式是 1912 年由 Bernstein 给出的，他并且证明了：当 f 在 $[0,1]$ 上连续时

$$\lim_{n\to\infty}B^n(f;x)=f(x) \tag{11}$$

对 $x\in[0,1]$ 一致地成立，这样，就为"定义在有限闭区间上的连续函数可被多项式一致地逼近"的 Weierstrass 定理提供了一个构造性的证明. 由于 Bernstein 逼近定理的证明可以从许多微积分教程中找到，我们在此就不加重复了.

Bernstein 多项式一直是函数逼近论中的重要工具和研究对象. 1953 年，G. Lorentz 出版了名为 Bernstein Polynomials 的专著，1986 年又出版了新版. 研究 Bernstein 多项式的文献已浩如烟海.

我们讨论连续函数 f(不一定是多项式). 由 Bernstein 逼近

定理，当 n 充分大时，$B^n(f;x)$ 是 f 的一个很好的逼近，f 称为**被逼近函数**. 我们来看看被逼近函数 f 与逼近多项式 $B^n(f;x)$ 之间的关系，由 Bernstein 形式的已知性质，立知

$$\left.\begin{aligned} B^n(f;0) &= f(0), \\ B^n(f;1) &= f(1). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

这就是说，在区间 [0, 1] 的两端，$B^n(f;x)$ 插值于被逼近函数 f. 由端点导数的性质，我们可以写出

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dx}B^n(f;0) &= n\left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right), \\ \frac{d}{dx}B^n(f;1) &= n\left(f(1) - f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

现在，我们从**变换**的观点来看 Bernstein 多项式，把 B^n 看成一个**变换**或**算子**，B^n 的作用是把函数 f 映射成多项式 $B^n(f;x) \in \mathscr{P}_n$. 很明显，$B^n$ 是一个**线性算子**，也就是说，对定义在 [0, 1] 上的两个函数 f 与 g 以及任何实数 λ 与 μ，我们有

$$B^n(\lambda f + \mu g;x) = \lambda B^n(f;x) + \mu B^n(g;x).$$

如果 $f(x) \geqslant 0$ 对 $x \in [0,1]$ 成立，那么 $B^n(f;x) \geqslant 0$ 对 $x \in [0,1]$ 成立，这表明 B^n 是**正线性算子**. 算子 B^n 具有**保单调性**，精确地说，我们有

定理 2.4 如果 f 是 [0, 1] 上的上升（下降）函数，那么 $B^n(f;x)$ 也是[0,1]上的上升(下降)函数.

证明 设 f 在 [0, 1] 上是上升的，特别地

$$f(0) \leqslant f(1/n) \leqslant f(2/n) \leqslant \cdots \leqslant f(1).$$

由

$$\frac{d}{dx}B^n(f;x) = n\sum_{i=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right]B_i^{n-1}(x) \geqslant 0,$$

立得结论，证完.

算子 B^n 也具有**保凸**的性质，更进一步，我们有

定理 2.5 设 f 是 [0, 1] 上的凸函数，于是

1. 对于 $n\in\mathcal{N}$, $B^n(f;x)$ 在 [0, 1] 上是凸的；
2. $B^n(f;x)\geqslant B^{n+1}(f;x)$ 对 $x\in[0,1]$ 及 $n\in\mathcal{N}$ 成立；
3. 如果 f 在[0,1]上连续，那么由 $B^n(f;x)=B^{n+1}(f;x)$，$x\in[0,1]$ 可以导出 f 是子区间$\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$，$i=1,\cdots,n$，上的线性函数；
4. 如果 f 在 [0, 1] 上连续，则

$$B^n(f;x)\geqslant f(x)$$

对 $x\in[0,1]$ 及 $n\in\mathcal{N}$ 成立.

证明 1. 由 f 的凸性可知

$$f\left(\frac{i}{n}\right)+f\left(\frac{i+2}{n}\right)-2f\left(\frac{i+1}{n}\right)\geqslant 0$$

对 $i=0,1,\cdots,n-2$ 成立，由此导出 $\frac{d^2}{dx^2}B^n(f;x)\geqslant 0$ 对 $x\in$ [0, 1] 成立，故 $B^n(f;x)$ 是凸函数；

2. 由升阶公式 (9) 得

$$\begin{aligned}B^n(f;x)&=\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)B_i^n(x)\\&=\sum_{i=0}^{n+1}\left[\frac{i}{n+1}f\left(\frac{i-1}{n}\right)\right.\\&\quad\left.+\left(1-\frac{i}{n+1}\right)f\left(\frac{i}{n}\right)\right]B_i^{n+1}(x)\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&B^n(f;x)-B^{n+1}(f;x)\\&=\sum_{i=0}^{n+1}\left[\frac{i}{n+1}f\left(\frac{i-1}{n}\right)\right.\end{aligned}$$

$$+\left(1-\frac{i}{n+1}\right)f\left(\frac{i}{n}\right)-f\left(\frac{i}{n+1}\right)\Big]B_i^{n+1}(x).$$

(14)

由于 f 在 [0，1] 上凸，依照（6），有

$$\frac{i}{n+1}f\left(\frac{i-1}{n}\right)+\left(1-\frac{i}{n+1}\right)f\left(\frac{i}{n}\right)\geqslant$$
$$f\left(\frac{(i-1)i}{n(n+1)}+\frac{i(n+1-i)}{n(n+1)}\right)=f\left(\frac{i}{n+1}\right),$$

由（14）立知 $B^n(f;x)\geqslant B^{n+1}(f;x), x\in[0,1]$.

3. 由条件 $B^n(f;x)=B^{n+1}(f;x)$ 和 f 的凸性推知

$$\frac{i}{n+1}f\left(\frac{i-1}{n}\right)+\left(1-\frac{i}{n+1}\right)f\left(\frac{i}{n}\right)=f\left(\frac{i}{n+1}\right)$$

(15)

对 $i=0$，1，…，n，$n+1$ 成立. 因 f 是凸函数，在子区间 $\left[\frac{i-1}{n},\ \frac{i}{n}\right]$中，$i=1$，2，…，$n$，曲线 $y=f(x)$ 应不在由两点 $\left(\frac{i-1}{n},f\left(\frac{i-1}{n}\right)\right)$与$\left(\frac{i}{n},f\left(\frac{i}{n}\right)\right)$所确定的直线段的上方. 可是(15) 表明曲线上的点$\left(\frac{i}{n+1},f\left(\frac{i}{n+1}\right)\right)$正好在这一段直线上，所以曲线必与这一段直线重合，这就是所需的结论.

4. 对于任何固定的 $n\in\mathcal{N}$，由已证的第二个结论可知：对任何 $m\in\mathcal{N}$ 有

$$B^n(f;x)\geqslant B^{n+m}(f;x), x\in[0,1]$$

令 $m\to\infty$，根据 f 的连续性以及 Bernstein 收敛定理，可得 $B^n(f;x)\geqslant f(x)$ 其中 $x\in$ [0，1]. 证完.

也许更有兴趣的结果是：Bernstein 多项式序列的单调下降性竟蕴含着其被逼近函数 f 的凸性，仔细说来就是

定理 2.6 (L. Kosmak) 设 $f:[0,1]\to \boldsymbol{R}$ 有连续的二阶导数并且

$$B^n(f;x)\geqslant B^{n+1}(f;x) \tag{16}$$

对 $x\in[0,1]$ 以及 $n\in\mathscr{N}$ 成立，那么 f 必是 $[0,1]$ 上的凸函数.

证明 首先，我们复习一下**均差**的概念，函数 f 在两点 x_1，x_2 处的一阶均差 $[x_1,x_2]f$ 定义为

$$[x_1,x_2]f:=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}. \tag{17}$$

当 f 有一阶导数时，由微分学中值定理可知：存在着 x_1 与 x_2 之间的一个实数 ξ 使得

$$[x_1,x_2]f=f'(\xi).$$

f 的一阶均差的均差称为**二阶均差**：

$$[x_1,x_2,x_3]f:=\frac{[x_2,x_3]f-[x_1,x_2]f}{x_3-x_1}.$$

当 f 有二阶导数时，二阶均差与二阶导数有如下的关系

$$[x_1,x_2,x_3]f=\frac{1}{2!}f''(\xi), \tag{18}$$

其中 ξ 介于 x_1，x_2，x_3 的最小值与最大值之间. 利用均差的记号，(14) 右边的 Bernstein 系数可以写为

$$\frac{1}{n^2}\frac{i}{n+1}\left(1-\frac{i}{n+1}\right)\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n+1},\frac{i}{n}\right]f,$$

从二阶均差的性质可知，有一点 $\xi_i\in\left[\frac{i-1}{n},\ \frac{i}{n}\right]$，$i=1,2,\cdots,n$ 以及 $\xi_0=0$，$\xi_{n+1}=1$ 使得

$$\frac{i}{n+1}f\left(\frac{i-1}{n}\right)+\left(1-\frac{i}{n+1}\right)f\left(\frac{i}{n}\right)-f\left(\frac{i}{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2n^2}\frac{i}{n+1}\left(1-\frac{i}{n+1}\right)f''(\xi_i),0\leqslant i\leqslant n+1.$$

于是，(14) 可以改写为

$$B^n(f;x)-B^{n+1}(f;x)$$
$$=\frac{1}{2n^2}\sum_{i=0}^{n+1}\frac{i}{n+1}\left(1-\frac{i}{n+1}\right)f''(\xi_i)B_i^{n+1}(x), \tag{18}$$

观察（18）可以发现，若在其右边用$\frac{i}{n+1}$来代替ξ_i，那么除了一个数量因子之外便是$x(1-x)f''(x)$的$n+1$次 Bernstein 多项式，我们指出，在n无限增大至无穷的过程中，这种代替对于极限函数是没有影响的，事实上，由于$\left|\xi_i-\frac{i}{n+1}\right|<\frac{1}{n}$对$i=0,1,\cdots,n+1$都成立，由$f''$在$[0,1]$上的一致连续性，存在$N\in\mathcal{N}$使得凡$n>N$时，便有

$$\left|f''(\xi_i)-f''\left(\frac{i}{n+1}\right)\right|<\varepsilon, \tag{19}$$

其中ε为任意给定的正数．因此，当$n>N$时

$$\left|\sum_{i=0}^{n+1}\frac{i}{n+1}\left(1-\frac{i}{n+1}\right)\left[f''(\varepsilon_i)-f''\left(\frac{i}{n+1}\right)\right]B_i^{n+1}(x)\right|$$
$$\leqslant\sum_{i=0}^{n+1}\frac{i}{n+1}\left(1-\frac{i}{n+1}\right)\left|f''(\xi_i)-f''\left(\frac{i}{n+1}\right)\right|B_i^{n+1}(x)$$
$$\leqslant\sum_{i=0}^{n+1}1\cdot 1\cdot\varepsilon B_i^{n+1}(x)=\varepsilon\sum_{i=0}^{n+1}B_i^{n+1}(x)=\varepsilon.$$

将（18）改写为

$$2n^2(B^n-B^{n+1})(f;x)=B^{n+1}(x(1-x)f'';x)$$
$$+\sum_{i=0}^{n+1}\frac{i}{n+1}\left(1-\frac{i}{n+1}\right)\left(f''(\xi_i)-f''\left(\frac{i}{n+1}\right)\right)B_i^{n+1}(x),$$

上式右端的第一项将随$n\to\infty$而趋向于$x(1-x)f''$，第二项当趋向于零．这样便得出

$$x(1-x)f''(x)=\lim_{n\to\infty}2n^2(B^n-B^{n+1})(f;x)$$

由于条件（16），由上式立得$x(1-x)f''(x)\geqslant 0$对$x\in[0,1]$

成立，由此可知 $f''(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是非负的，因此 f 是凸函数. 证完.

定理 2.6 始见于[Kosmak'60]. 到了 1967 年，[Ziegler'67]将 f 有二阶导数的条件放宽到只要 f 是 $[0, 1]$ 上连续的函数，由(16)也可以得到 f 在该区间上的凸性，这些命题称为**凸性的逆定理**. 在 Lorentz 的名著 Bernstein Polynomials 的新版中，他把 Kosmak 等人的工作列为自五十年代以来 Bernstein 多项式理论中为数不多的重要成果之一.

§5 磨光性质

在§4 中，我们证明了 Bernstein 算子具有保符号性质、保单调性质以及保凸性质，因为这些性质都与几何形状有关，把这些性质概括起来说算子 B^n 具有**保形性质** (shape preserving property).

在结束本章的时候，我们介绍算子 B^n 的另一个性质，可以称之为**磨光性质** (smoothing property). 能够证明，任何直线与曲线 $y=B^n(f; x)$ 的交点的数目决不会多于该直线与曲线 $y=f(x)$ 的交点的数目，粗略地说，$B^n(f;x)$ 的光顺性决不会次于 f 的光顺性. 从几何上说，多项式 $B^n(f;x)$ 一方面继承了 f 的几何特征，与 f 非常神似，另一方面又比 f 更加光顺，这是何等神奇美妙的事！

下面，从另外一种考虑来领略一下算子 B^n 的磨光性质，为此，我们需要把多项式的 Bernstein 表示转变成幂函数基表示的转换公式，设 $p=(a_0,a_1,\cdots,a_n)$，由 (3) 可知 p 可用移位算子

来表示. 由于 $\Delta=E-I$，因此 (3) 可以改写为

$$p(x) = (I + x\Delta)^n a_0. \tag{20}$$

对 (20) 的右端使用二项式展开，得

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (\Delta^i a_0) x^i, \tag{21}$$

其中 Δ^i 为 i 阶差分算子，把以上结果用到 Bernstein 多项式上，得

$$B^n(f;x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(\Delta^i f\left(\frac{0}{n} \right) \right) x^i. \tag{22}$$

如果 f 本身是一个 m 次的多项式，那么高于 m 阶的差分一概等于零，这就是说，当 f 本身为 m 次多项式时，$B^n(f;x)$ 的次数 $\leqslant \min(m,n)$.

有了这一点准备知识，我们来计算三个函数 $1,x,x^2$ 的 Bernstein 多项式，最为简单的是

$$B^n(1;x) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(x) = 1.$$

其次，我们知道 $B^n(x;x)$ 是一次多项式，故可设 $B^n(x;x) = \alpha + \beta x$，由端点的插值性得

$$\alpha = B^n(x;0) = x|_{x=0} = 0,$$

$$\beta = B^n(x;1) - \alpha = x|_{x=1} = 1,$$

所以，对任何 $n \in \mathcal{N}$ 有

$$B^n(x;x) = x.$$

多项式 $B^n(x^2;x)$ 是二次的，可设 $B^n(x^2;x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$. 由 $B^n(x^2;0) = x^2|_{x=0} = 0$，可知 $\alpha = 0$. 再由 $B^n(x^2;1) = x^2|_{x=1} = 1$ 可得 $\gamma = 1 - \beta$. 因此

$$B^n(x^2;x) = \beta x + (1 - \beta)x^2.$$

计算在 $x = 0$ 处的导数，由公式(13)中的第一式得到

$$\beta = n\left(\frac{1}{n^2} - 0\right) = \frac{1}{n},$$

所以 $B^n(x^2;x) = \frac{1}{n}x + \left(1 - \frac{1}{n}\right)x^2$. 为了方便，把这三个等式写在一起

$$\left.\begin{aligned} &B^n(1;x) = 1, \\ &B^n(x;x) = x, \\ &B^n(x^2;x) = \frac{1}{n}x + \left(1 - \frac{1}{n}\right)x^2. \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

从(23)的头两个式子知道，如果 f 是线性函数那么 $B^n(f;x) = f(x)$，也就是说，一次函数是算子 B^n 的**不动点**. 不久将看到，这是 B^n 的唯一的不动点，有些作者说，算子 B^n 的再生性很差，指的就是 B^n 只保留线性函数.

现在，我们讨论算子 B^n 的连续作用. 算子 B^n 作用于 f，得出 $B^n(f;x)$，当然可再将 B^n 作用于后者，得到的多项式记为 $(B^n)^{(2)}(f;x)$，再被 B^n 作用一次，得出的结果记为 $(B^n)^{(3)}(f;x)$，如此等等. 这样，就定义了算子 B^n 的方幂 $(B^n)^{(k)}$，$k \in \mathscr{N}$，它也是一个正线性算子. 我们要研究，当 $k \to \infty$ 的时候，$(B^n)^{(k)}$ 有怎样的表现？

定理 2·7 （[Kelisky - Rivlin'67]）对任何 $f:[0;1] \to \boldsymbol{R}$ 有

$$\lim_{k\to\infty}(B^n)^{(k)}(f;x) = f(0) + (f(1) - f(0))x. \qquad (24)$$

定理的几何意义是，在[0,1]上方的一条曲线，不管具几何行为是多么不规整，在算子 B^n 一次又一次地无限作用之下，最后变成由曲线的两个端点所决定的直线段. 这个事实，十分形象地显示了 B^n 的磨光性质.

定理的两位作者原来的证明用到了矩阵的特征值和特征向量，以下给出的证明则是十分初等的.

证明 先讨论很特殊的函数 $f(x)=x(1-x)$. 由(23)可知

$$B^n(f;x)=\left(1-\frac{1}{n}\right)f,$$

归纳地,对 $k\in\mathcal{N}$,有

$$(B^n)^{(k)}f=\left(1-\frac{1}{n}\right)^k f.$$

由于 $0\leqslant(1-1/n)<1$ 以及 $0\leqslant x(1-x)\leqslant 1/4$,立知

$$\lim_{k\to\infty}(B^n)^{(k)}(x(1-x);x)=0. \tag{25}$$

这说明定理对函数 $x(1-x)$ 是正确的.

由(23)的第一、二两式看出,对 $k\in\mathcal{N}$,有

$$(B^n)^{(k)}(1;x)=1,\qquad (B^n)^{(k)}(x;x)=x,$$

今考察方幂 x^m;其中 $m=2,3,4,\cdots$. 当 $x\in[0,1]$ 时,有

$$\begin{aligned}0\leqslant x-x^m&=x(1-x^{m-1})\\&=x(1-x)(1+x+\cdots+x^{m-2})\\&\leqslant(m-1)x(1-x),\end{aligned}$$

由算子 $(B^n)^{(k)}$ 的线性和正性可知

$$\begin{aligned}&0\leqslant x-(B^n)^{(k)}(x^m;x)\\&\quad\leqslant(m-1)(B^n)^{(k)}(x(1-x);x),\end{aligned}$$

由(25),立刻得到

$$\lim_{k\to\infty}(B^n)^{(k)}(x^m;x)=x,\qquad m\in\mathcal{N}. \tag{26}$$

现在转来讨论最一般的函数 f,设

$$B^n(f;x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n,$$

由(26)看出

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty}(B^n)^{(k)}(f;x)=a_0+(a_1+\cdots+a_n)x\\&=B^n(f;0)+[B^n(f;1)-B^n(f;0)]x\end{aligned}$$

由在端点的插值性得到

$$\lim_{k\to\infty}(B^n)^{(k)}(f;x) = f(0) + (f(1) - f(0))x,$$

这就完全地证明了定理.

作为这个定理的一个推论，我们可以定出 B^n 的全部不动点. 设 f 是 B^n 的一个不动点，因此 f 也是 $(B^n)^{(k)}$ 的一个不点，$k \in \mathscr{N}$，特别地

$$f(x) = \lim_{k\to\infty}(B^n)^k(f;x) = f(0) + (f(1) - f(0))x$$

所以 f 必是线性函数.

§ 6　结束语

本章是全书的导论和基础. Bernstein 多项式在函数逼近论中是一个古典的工具，也是迄今为止最受人们注意的正线性算子. 它在逼近论中的地位，显然是由 Bernstein 收敛定理确立的. 但是十分遗憾的是，它的收敛速度十分缓慢. 可以从公式(23)的最后一个式子看出：若要用 Bernstein 多项式去逼近最简单的函数 x^2(它本来就是一个多项式!)，要使误差不超过百分之一，那么至少得使用 25 次的多项式.

在本章中，我们没有从逼近角度上去讨论 Bernstein 多项式，而是将重点放在它的优美的几何性质上，诸如端点的插值性、保形性和磨光性上. Bernstein 多项式既继承了被逼近函数的几何形态又变得比被逼近函数更为光顺，这是它的优点. 这些优点的存在是付出过沉重的代价的，那就是收敛速度的缓慢. 著名数学家、美国 Brown 大学教授 P. J. Davis 在他的名著 Interpolation and Approximation 一书(见[Davis'63])对此有精

辟的论述:“这个事实(指收敛的缓慢)似乎是妨碍了 Bernstein 多项式获得任何的数值应用. 当大范围的逼近性质来得比逼近的远近更为重要时,或许它们能找到用处.”他写作这一段话时,应当是在 1963 年之前,正是在 Bézier 在雷诺汽车公司建立 UNISURF 程序的时刻;而 UNISURF 的数学基础正好是 Bernstein 多项式理论. 半个世纪以来没有“任何数值应用”的理论,这时才找到了用武之地. 人们不能不叹服 Davis 教授的精辟预见.“山重水复疑无路,柳暗花明又一村”. 这种现象,在数学的历史上是屡见不鲜的. 当年数学家的一种空想,经历了相当长的时间之后,说不定会是很有实用价值的珍宝,如果要求数学中的每一种发现,从它的诞生之日起就有立竿见影的实用效果,那是太短视了.

多项式有种种不同的表示,采用 Bernstein 基函数的表示法有许多独特的优点,在这种表示之下,可以定义控制多边形的概念. 控制多边形是分片线性的函数,它与对应的多项式有密切的联系. 从几何图形上来看,它们十分神似. 调整和控制折线总比调整和控制多项式曲线容易得多,因此,可以用调整控制多边形的办法使得多项式曲线符合人们的要求. 控制多边形的思想不是职业数学家的贡献,而是产生于工程专家 Bézier 的实践. 下一章将论及 Bézier 曲线,在其中控制多边形的作用将更为明显.

第三章　Bézier 曲线

在计算机辅助几何设计中，表示曲线的最常用的方法是曲线的参数（向量）方程式. 用这种方式来表示曲线，不依赖于座标系的选择，这正是外形几何最重要的特征. 单参数的向量方程表示曲线. 我们按照通常的习惯，参数用字母 t 来记. 通常关心的是曲线的有限的一段，因此参数 t 被限制在一个闭区间中变化，不失一般性，可设 $t \in [0,1]$.

Bézier 在 UNISURF 系统中是这样表示多项式曲线的. 他首先引入函数：

$$f_0^n(t) := 1,$$

而对于 $i = 1,2,\cdots,n$

$$f_i^n(t) := \frac{(-t)^i}{(i-1)!}\frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}\left(\frac{(1-t)^n-1}{t}\right), \tag{1}$$

这些函数 $\{f_i^n(t)\}, i = 0,1,\cdots,n$，叫做 **Bézier 基函数**. 再设 $\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 为空间中给定的 $n+1$ 个向量. 把 a_0 的起点作为原点，其余向量的起点放在前一向量的终点上，首尾相接. 以 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 为边，组成的（开）多边形称为**控制多边形**，由它们作成的参

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} f_i^n(t)\boldsymbol{a}_i, \tag{2}$$

数曲线被人们称为 n 阶 **Bézier 曲线**. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 组成了控制多边形的**边向量**.

基函数 $\{f_i^n(t)\}$ 中,除 $f_0^n(t) = 1$ 是常数外,其余实际上都是 t 的 n 次多项式. 这些函数的表达式(1) 看上去十分怪异,Bézier 是怎样将它们构造出来的始终是一个谜. [Forrest'72] 指明,曲线(2) 实际上是以向量为系数的 Bernstein 表式. 精确地说,可以证明

$$f_i^n(t) = B_i^n(t) + B_{i+1}^n(t) + \cdots + B_n^n(t),$$

$i = 0,1,\cdots,n$. 于是可以把曲线(2) 转化为

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{i=0}^{n} f_i^n(t)\boldsymbol{a}_i, \\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} B_j^n(t)\boldsymbol{a}_i \end{aligned}$$

即

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\boldsymbol{b}_i, \tag{3}$$

其中

$$\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \boldsymbol{a}_i, \qquad i = 0,1,\cdots,n$$

很明白,$\{\boldsymbol{b}_i\}$ 是控制多边形的**顶点**,称为曲线 $P(t)$ 的**控制点**.

这里还有一段公案. 几乎在同一时刻,即在 1959 年左右,法国另一家著名的汽车公司(雪铁龙汽车公司) 的 de Casteljau,曾独立地提出了同样的方法,他甚至更为直接地用了(3) 来表示曲线,对于曲面(乃至三角曲面) 也作过大量的工作. 可惜的是,他的工作一直秘而不宣,没有发表,因此被人们普遍接受的还是 Bézier 的名字. 近年来,有些专家热衷于发掘和宣扬de Casteljau 的贡献. 我们还是按大多数人已形成的习惯,称之为 Bézier 曲

线、曲面，或者 Bézier 方法；有时也称之为 Bernstein-Bézier 方法，或者是 B-B 方法.

§ 1. Bézier 曲线的性质

在前一章的 § 1 中，我们详细地讨论过多项式的 Bernstein 表示的性质，因此，可以很方便地把那儿某些计算性的结果直接移植过来. 例如说(3) 式可以通过移位算子改写为

$$\boldsymbol{P}(t) = [(1-t)I + tE]^n \boldsymbol{b}_0 \tag{4}$$

用 $t=0$ 与 $t=1$ 代入(4)，分别得出

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{P}(0) &= \boldsymbol{b}_0, \\ \boldsymbol{P}(1) &= \boldsymbol{b}_n. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

这就是说，Bézier 曲线的起点 $\boldsymbol{P}(0)$ 和终点 $\boldsymbol{P}(1)$ 分别和其控制多边形的第一个与最后一个顶点重合，其他的控制点一般不在 Bézier 曲线上.

在(4) 的双方对 t 求导数，得出

$$\boldsymbol{P}'(t) = n[(1-t)I + tE]^{n-1} \Delta \boldsymbol{b}_0 \tag{6}$$

将 $t=0$ 与 $t=1$ 分别代入上式，得出

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{P}'(0) &= n(\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_0) = n\boldsymbol{a}_1, \\ \boldsymbol{P}'(1) &= n(\boldsymbol{b}_n - \boldsymbol{b}_{n-1}) = n\boldsymbol{a}_n. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

以上二式表明，Bézier 曲线在首、末两端的切向量分别与其控制多边形的第一边和最后一边平行，也可以说成：Bézier 曲线在首、末两点上与控制多边形相切.

图 3.1 中画出了两条 Bézier 曲线及它们所对应的控制多边形. 由图可以看出，曲线的神态与其对应的控制多边形十分相似.

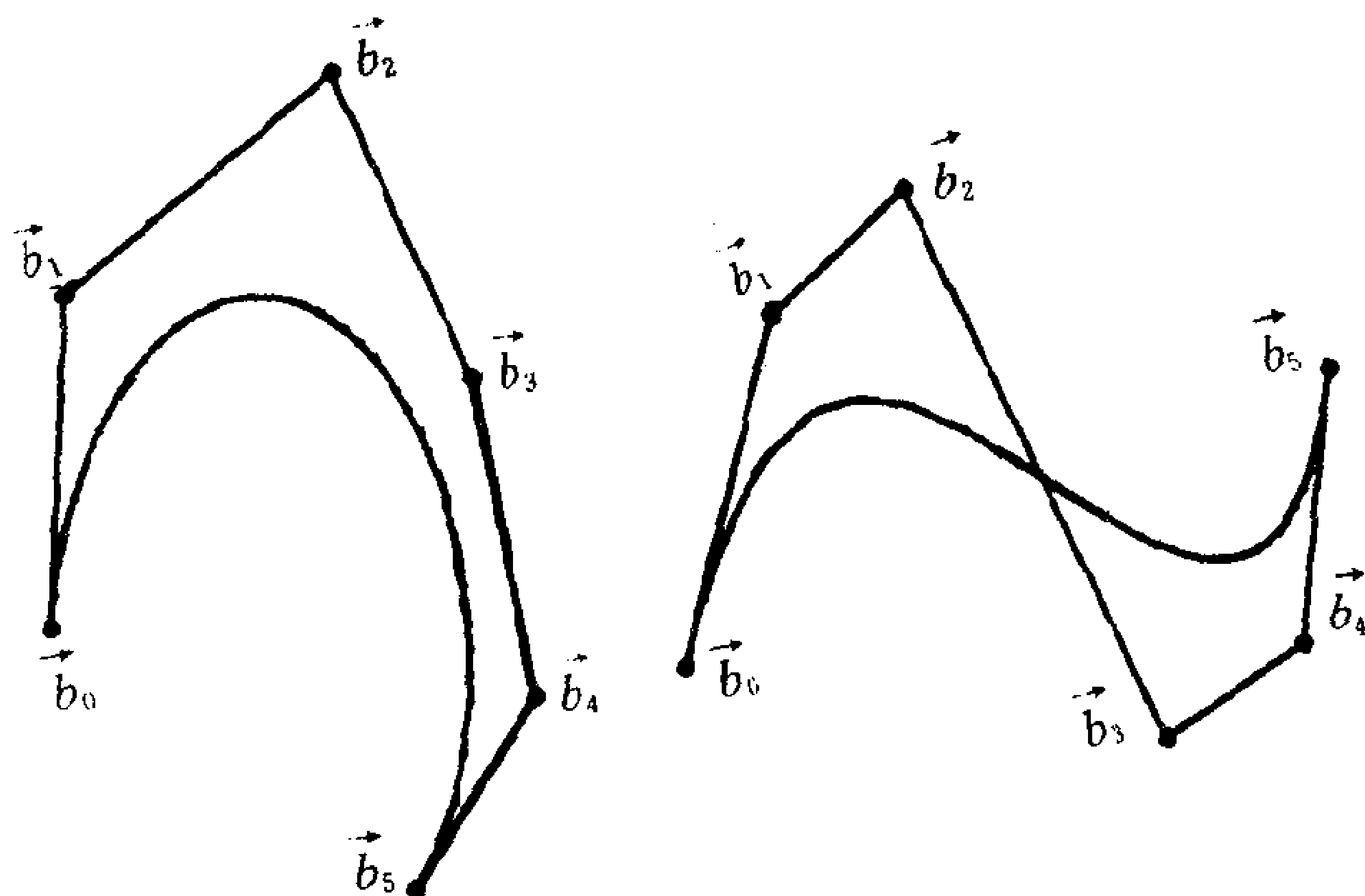


图 3.1　Bézier 曲线

在介绍 Bézier 曲线下一个重要性质之前，我们简要地谈一谈**凸集**. 一个集合叫做凸集，是指这个集合如果含有两个点则必包含这两个点连成的直线上的每一个点. 例如说，平面上的正方形、圆盘都是凸集，球是空间中的凸集，等等. 很容易举出不是凸集的例子，例如图 3.2 所包围的平面区域就不是凸集，因为 A 与 B 这两点都在这图形中，但线段 $\overline{AB}$ 上有不在这个图形中的点.

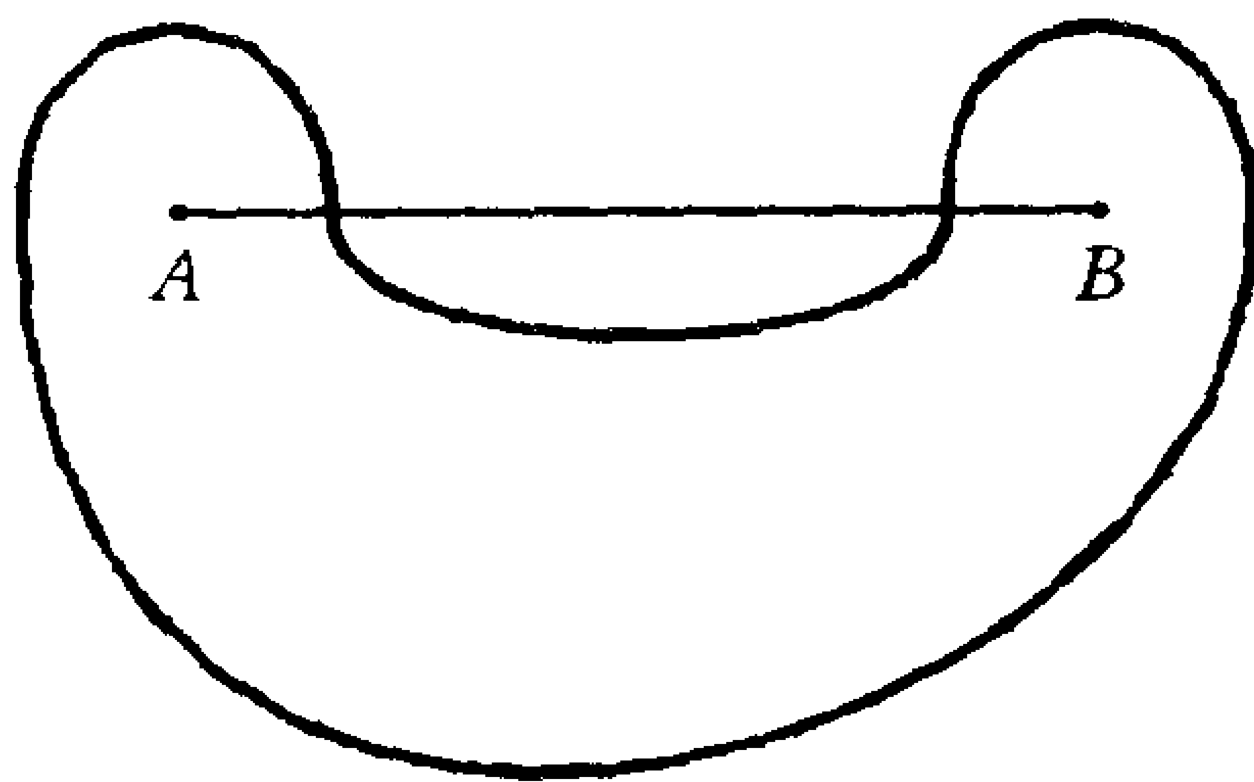


图 3.2　非凸的集合

设K是一个点集.包含K的最小凸集称为K的**凸包**.例如,如果K是一个单点集,那么K是凸集,K的凸包也就是K本身;如果K是由不重合的两点A与B组成的,那么K的凸包就是由线段$\overline{AB}$上所有的点组成的集,用公式来表示就是

$$\{\lambda_1 A + \lambda_2 B \mid \lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0 \text{ 且 } \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}.$$

如果K是由不共线的三点A,B,C组成的集合,那么K的凸包就是以这三点为顶点的三角形上的所有点(包括三边上的点)的集合,它们可以用公式表为

$$\{\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geqslant 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\}$$

一般地,给定空间中$n+1$个点$A_0, A_1, \cdots A_n$,它们组成的集合记为K,那么K的凸包是点集

$$\left\{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i A_i \mid \text{诸 } \lambda_i \geqslant 0 \text{ 且} \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\right\},$$

和式$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i A_i$称为点$A_0, A_1, \cdots, A_n$的**凸线性组合**.由于基函数$\{B_i^n(t)\}$的性质(见第2章导言部份)可见,由(3)式所表示的Bézier曲线必须完全落在控制点$\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n$所成点集的凸包之中,这叫做Bézier曲线的**凸包性质**.这个凸包给出了Bézier曲线存在区域的一个限定,虽然这个限定有时十分松散,但是在某种情况之下仍然有积极的意义.在CAGD中,两条Bézier曲线求交是很重要、很实际的问题.我们可以分别求出它们的控制点的凸包(这往往比计算曲线本身容易得多),并求出它们相交的部分,那么曲线的交点必然在这个交集之内.特别地,若这两个凸包不相交,可以肯定,那两条Bézier曲线没有交点.

看看两个简单的情况.两个控制点$\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1$决定的Bézier曲线是

$$\boldsymbol{P}(t) = (1-t)\boldsymbol{b}_0 + t\boldsymbol{b}_1, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

它是由 $\boldsymbol{b}_0$ 与 $\boldsymbol{b}_1$ 两点所决定的直线段. 二阶的 Bézier 曲线有三个控制点 $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$, 由凸包性质可知, 它总是平面曲线(因为它存在于以三个控制点为顶点的三角形中)可以证明, 它是一条抛物线(图 3.3); 在退化的情形, 它是一条直线段.

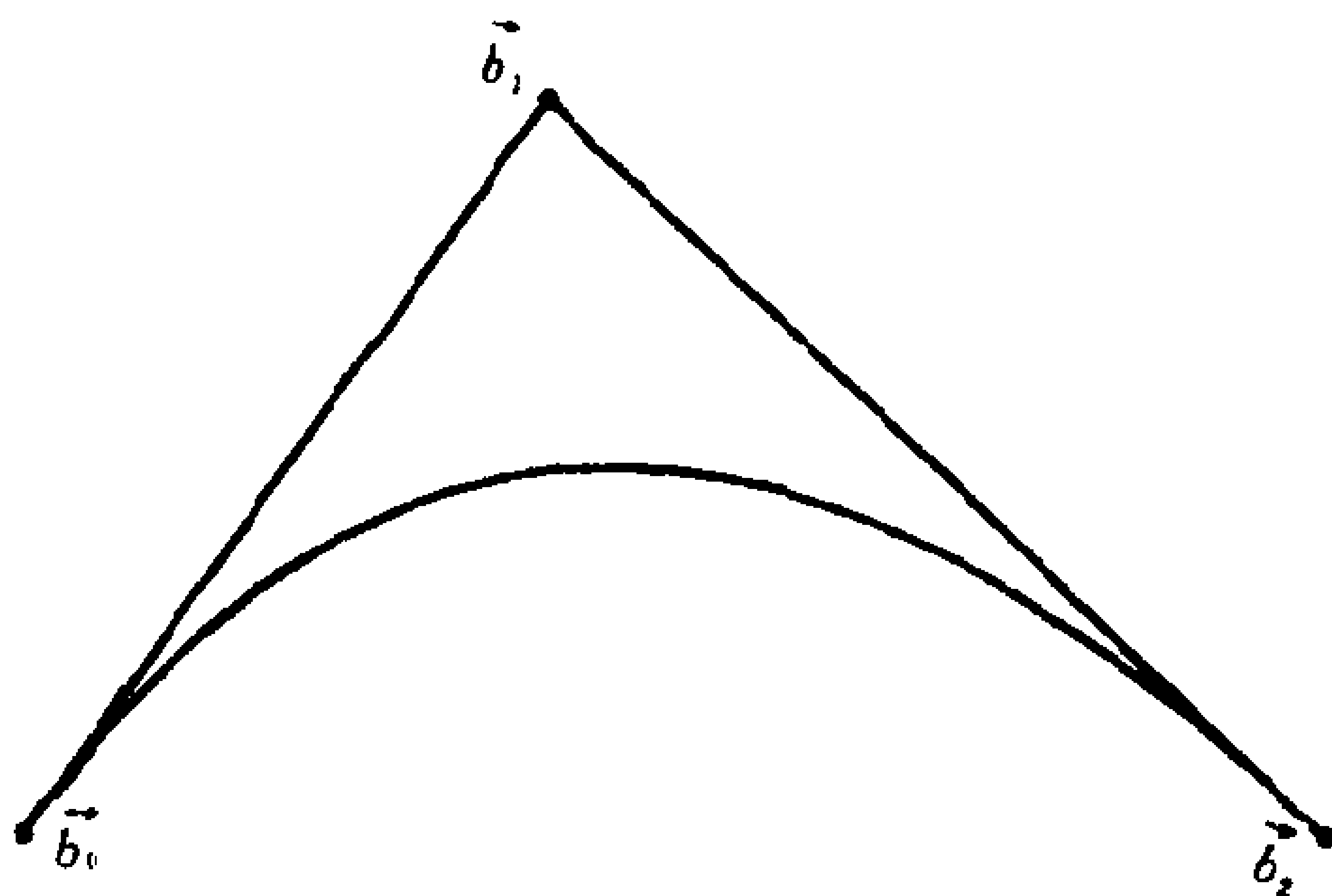


图 3.3 二次 Bézier 曲线是抛物线

但是, 三次 Bézier 曲线, 即使是平面三次 Bézier 曲线, 则是千姿百态, 变化万千(见第 4 章).

根据人们的常识, 处理由直线段组成的连续折线远比处理很一般的曲线来得容易得多. Bézier 曲线既然与它的控制多边形有很大的相似性, 便可以让人们用调整多边形作为手段以实现调整曲线的目的, 这就是 Bézier 方法受到设计人员的青睐的缘故.

我们简单地谈谈用 Bézier 方法来完成计算机交互曲线设计的要点. 首先, 必须有一个实现 Bézier 方法的程序系统. 在令这个系统运行之前, 先要输入所有的控制点, 计算机随即产生由这些控制点决定的控制多边形, 显示于屏幕之上. 在系统快速运行之后, 计算机屏幕立刻显示对应的 Bézier 曲线. 设计者依据自己的构想来判断这条曲线是否可被接受. 如果他不满意这一结果,

他可以部份甚至全部修改这些控制点，让机器重新生成新的曲线供他再行选择，必要的时候，设计者可以反复这一过程，直到产生出一条使他完全满意的曲线为止. 控制多边形起着向导的作用. 对一个熟练的设计者来说，他能从控制多边形的形状比较正确地预见对应的Bézier 曲线的形状，很少几次地反复便能达到他的目的.

一个实用的系统应当包括哪些算法呢？它至少应当包含以下四节的内容.

§ 2 升 阶

完全类似于第二章 § 3，我们可以讨论Bézier 曲线的升阶. n 阶 Bézier 曲线(3) 总可以表示为 $n+1$ 阶的 Bézier 曲线

$$\boldsymbol{P}(t) = \sum_{i=0}^{n+1} B_i^{n+1}(t)\boldsymbol{b}_i^* \tag{8}$$

式中

$$b_i^* = \frac{i}{n+1}\boldsymbol{b}_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)\boldsymbol{b}_i \tag{9}$$

$i = 0,.1,\cdots,n+1$，(9) 中的 $\boldsymbol{b}_{-1}$ 与 $\boldsymbol{b}_{n+1}$ 应理解为零向量，所以 $\boldsymbol{b}_0^* = \boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_{n+1}^* = \boldsymbol{b}_n$.

升阶后的控制点为 $\boldsymbol{b}_0^*, \boldsymbol{b}_1^*, \cdots, \boldsymbol{b}_{n+1}^*$，它们决定一条有着 $n+1$ 边的控制多边形，称为**升阶多边形**，它与原来的控制多边形定义同一条 Bézier 曲线. 一般说来，升阶多边形将更加贴近 Bézier 曲线. 升阶的过程可以反复地、无限制地进行下去，产生的升阶多边形序列将收敛于它们定义的 Bézier 曲线，这就是升阶收敛定理(Farin 定理).

升阶有怎样的作用？升阶一次之后，Bézier 曲线没有任何改

变，但多了一个控制点，因此多了一分调整的灵活性，从 Farin 定理可知，升阶提供了用折线逼近 Bézier 曲线的简单方法. 其次，从公式(9) 可以看出，b_i^* 在由 $\boldsymbol{b}_{i-1}$ 与 $\boldsymbol{b}_i$ 所决定的线段上，因此升阶控制点的凸包一定被包含在原来的控制点形成的凸包之中，一般来说，升阶凸包给出了更紧的对 Bézier 曲线的限定. 分别对两条 Bézier 曲线升阶，再考虑它们的升阶凸包的交集，提供了求出这两条 Bézier 曲线的交点的有效算法.

§ 3 de Casteljau 算法

前节已经指出，升阶过程提供了用升阶多边形来逼近 Bézier 曲线的方法，而且可以达到任意的精确度. 但是，这仅仅是"逼近"，除了曲线的首末两端点之外，升阶多边形可以与曲线不相交.

下面的算法叫做 **de Casteljau 算法**，又叫 **Bézier 曲线的作图定理**，指明了如何反复地使用"定比分点"(线性插值) 这种十分简单的操作来计算 Bézier 曲线上的任何一点.

我们先来叙述这一算法.

设 $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ 是 n 阶 Bézier 曲线(3) 的控制点. 对任意固定的 $t \in [0,1]$，在从 $\boldsymbol{b}_i$ 到 $\boldsymbol{b}_{i+1}$ 的直线段上，取一点 $\boldsymbol{b}_i^{(1)}$ 把这一段直线按比例 $t : (1-t)$ 分为两段，即

$$\boldsymbol{b}_i^{(1)} = (1-t)\boldsymbol{b}_i + t\boldsymbol{b}_{i+1} \tag{10}$$

$i = 0, 1, \cdots, n-1$. 这样就得到了 n 个点 $\boldsymbol{b}_0^{(1)}, \boldsymbol{b}_1^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{b}_{n-1}^{(1)}$. 对这些点重复同一过程，作出点

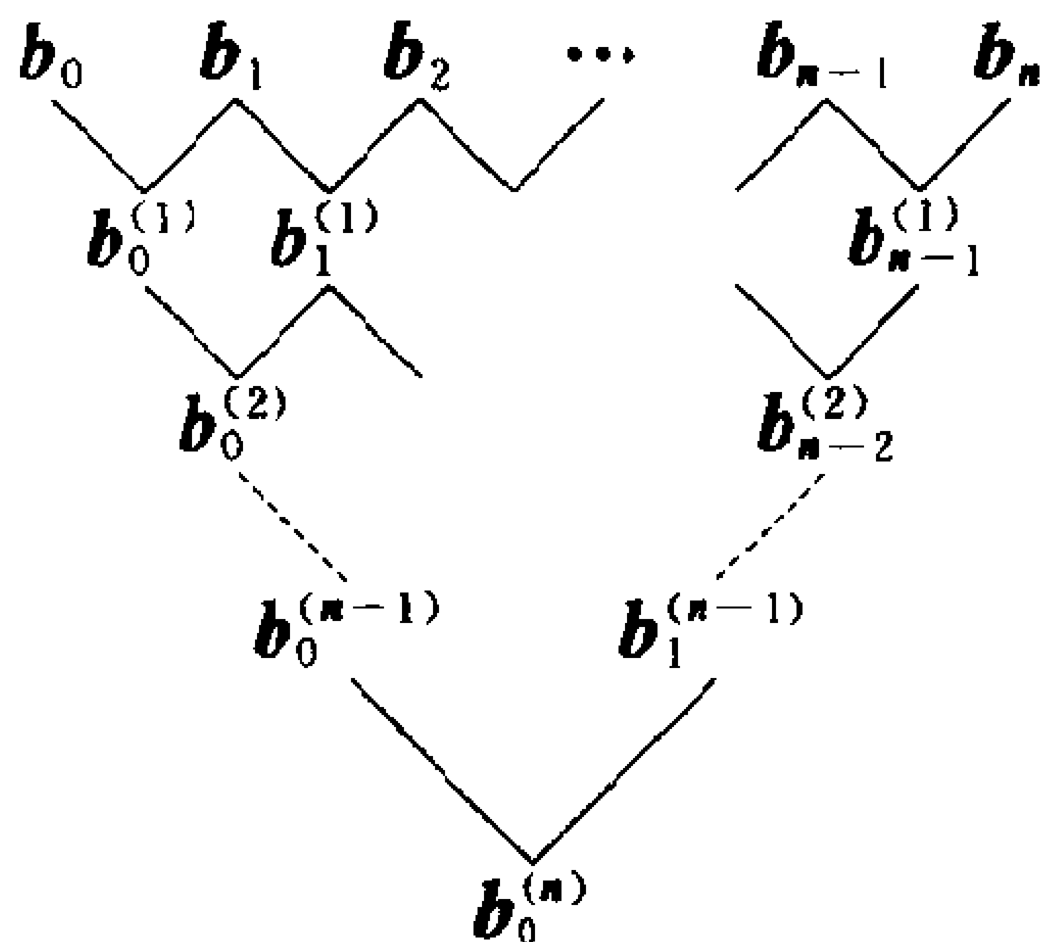
$$\boldsymbol{b}_i^{(2)} = (1-t)\boldsymbol{b}_i^{(1)} + t\boldsymbol{b}_{i+1}^{(1)}, \tag{11}$$

这里 $i = 0, 1, \cdots, n-2$. 如此继续下去 ……，最后得出一个点

$\boldsymbol{b}_0^{(n)}$

$$\boldsymbol{b}_0^{(n)} = (1-t)\boldsymbol{b}_0^{(n-1)} + t\boldsymbol{b}_1^{(n-1)}. \tag{12}$$

为了便于理解，我们写出如下的格式



从这一格式看出，从第二排往下，每一个数由它的“肩”上的两数产生，精确地说，它等于用 $1-t$ 乘上“左肩”上的数加上用 t 乘上“右肩”上的数.

现在可以来叙述作图定理.

定理 3.1 1）对 $t \in [0,1]$， $P(t) = \boldsymbol{b}_0^{(n)}$；

2）从点 $\boldsymbol{b}_0^{n-1}$ 到点 $\boldsymbol{b}_1^{(n-1)}$ 作成的向量是 Bézier 曲线在点 $P(t)$ 处的一个切向量.（见图 3.4）.

证明 如果利用移位算子，证明将变得十分简洁. 首先，(10) 可以表示为

$$\boldsymbol{b}_i^{(1)} = [(1-t)I + tE]\boldsymbol{b}_i^{(0)}$$

这里 $\boldsymbol{b}_0^{(0)} = \boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1^{(0)} = \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n^{(0)} = \boldsymbol{b}_n, i = 0,1,\cdots,n-1$. 而(11)可以表为

$$\boldsymbol{b}_i^{(2)} = [(1-t)I + tE]\boldsymbol{b}_i^{(1)},$$

$$i = 0,1,\cdots,n-2.$$

归纳地，我们有

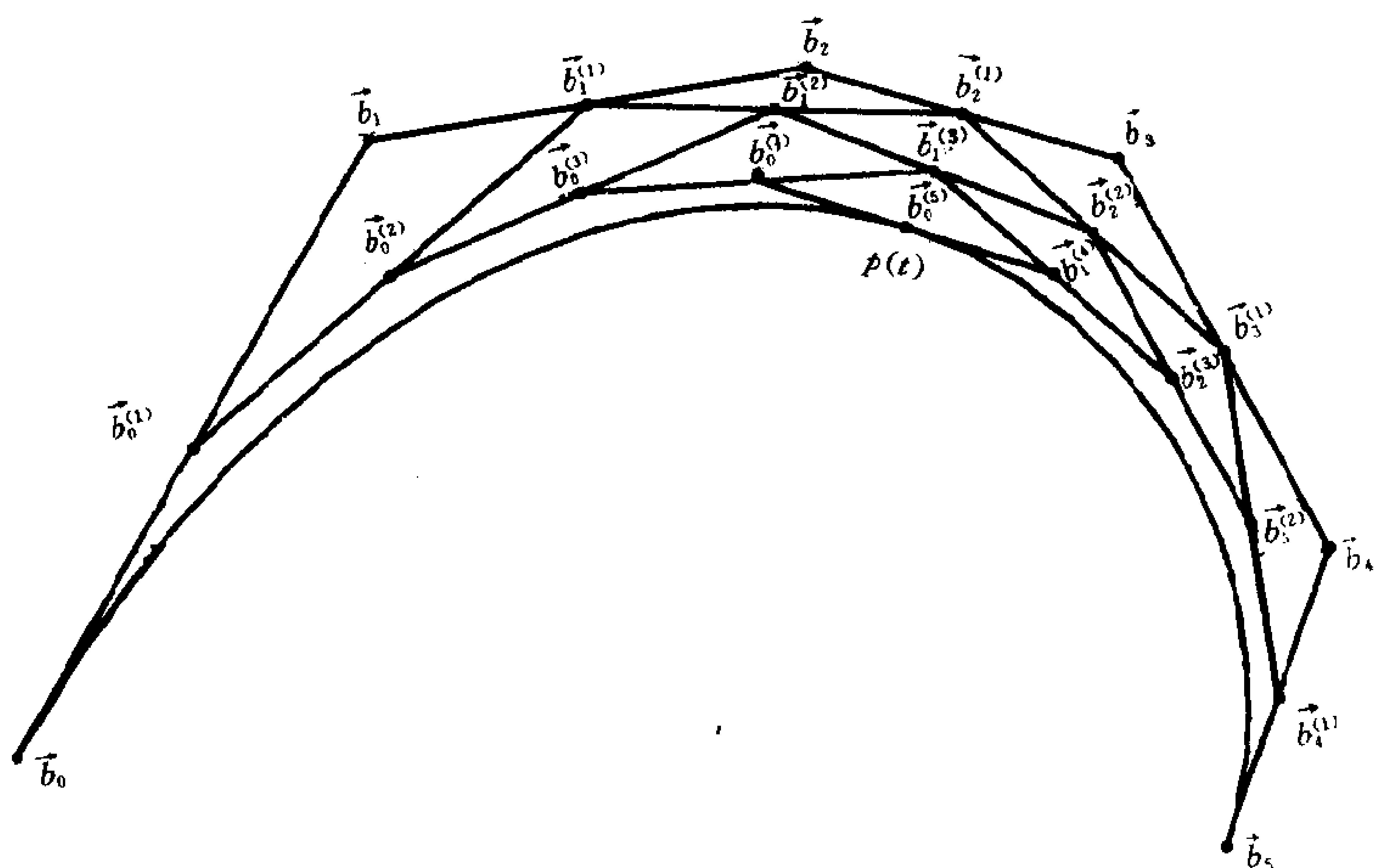


图 3.4 de Casteljau 算法

$$b_i^{(k)} = [(1-t)I + tE]b_i^{(k-1)},$$

这里 $k = 1,2,\cdots,n$ 而 $i = 0,1,\cdots,n-k$. 反复地使用上式,得出

$$b_i^{(k)} = [(1-t)I + tE]^k b_i \tag{13}$$

这里 $i = 0,1,\cdots,n-k$. 在公式(13)中,令 $k = n$(这时 $i = 0$)便有

$$b_0^{(n)} = [(1-t)I + tE]^n b_0 = P(t),$$

这便证得了第一个结论.

为了证明第二个结论,由(13)可得出

$$b_0^{n-1} = [(1-t)I + tE]^{n-1} b_0,$$

$$b_1^{n-1} = [(1-t)I + tE]^{n-1} b_1.$$

从而,由 $b_0^{(n-1)}$ 指向 $b_1^{(n-1)}$ 的向量是后者减去前者的差,即

$$[(1-t)I + tE]^{n-1}(b_1 - b_0) =$$

$$= [(1-t)I + tE]^{n-1}\Delta b_0,$$

与(6)作比较，立知上述向量即$\frac{1}{n}P'(t)$，证完.

作图定理的一个重要推论是：Bézier 曲线与座标系的选择无关，是**几何不变的**. 也就是说，如果我们把控制多边形经过刚体运动从空间的一处移到另一处，那么它们所对应的曲线经过同一个刚体运动就可以完全重合.

作为作图定理的一个特例，取 $t=0$ 及 $t=1$，便得出了 Bézier 曲线的端点插值性质和端点处的切线性质.

作图定理还可以被进一步推广，那就是在下一节中要叙述和证明的分割定理.

§ 4　分割定理

在执行 de Casteljau 算法的过程中，我们顺便得到"副产品"—— 两个点组：

$$\boldsymbol{b}_0,\boldsymbol{b}_0^{(1)},\boldsymbol{b}_0^{(2)},\cdots,\boldsymbol{b}_0^{(n)} \tag{14}$$

以及

$$\boldsymbol{b}_0^{(n)},\boldsymbol{b}_1^{(n-1)},\cdots,\boldsymbol{b}_{n-1}^{(1)},\boldsymbol{b}_n \tag{15}$$

对照着 § 3 中的"格式"来看，它们正好位于两条倾斜的直线的左边与右边，左边的自上往下数，右边的从下往上数.

再来看图 3.4. 点 $\boldsymbol{P}(t)=\boldsymbol{b}_0^{(n)}$ 把整条 Bézier 曲线分为左、右两段. 细看上去，点组(14)恰似定义左边的曲线的控制点，而点组(15)恰似定义右边那部份曲线的控制点.

这种观察是正确的，这正是所谓的分割定理的内容.

为了用公式简洁地表达上述事实，有必要把 Bézier 曲线对

控制点的依赖关系更加明确地表示出来. 那就是说，最好把由控制点 $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ 所确定的 Bézier 曲线写成 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n; t)$.

我们有

定理 3.2 (分割定理) 设(14) 与(15) 中的两个点组是对应于参数 t 由 de Casteljau 算法得出的，对任意固定的 $t \in [0, 1]$，我们有

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_0^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{b}_0^{(n)}; s) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n, st). \tag{16}$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{P}(\boldsymbol{b}_0^{(n)}, \boldsymbol{b}_1^{(n-1)}, \cdots, \boldsymbol{b}_n; s) \\ &= \boldsymbol{P}(\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n; 1 - (1-s)(1-t)), \end{aligned} \tag{17}$$

这里 s 在[0,1] 中变化.

证明 我们先证明(16). 利用算子的表示，(16) 的右边可以写成

$$[(1-st)I + stE]^n \boldsymbol{b}_0,$$

重新组合方括号内的表达式，可将上式改写为

$$[(1-s)I + s((1-t)I + tE)]^n \boldsymbol{b}_0.$$

将最后一式作二项式展开，得到

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} s^i (1-s)^{n-i} [(1-t)I + tE]^i \boldsymbol{b}_0 \\ &= \sum_{i=0}^{n} B_i^n(s) [(1-t)I + tE]^i \boldsymbol{b}_0 \\ &= \sum_{i=0}^{n} B_i^n(s) \boldsymbol{b}_0^{(i)}, \end{aligned}$$

在获得最后一个等式的时候，利用了公式(13) 中 $i = 0$ 时的特款，这样就完成了(16) 的证明.

我们指出，(17) 可以由(16) 直接推出，无需重新计算. 首先注意一个事实

$$P(b_0,b_1,\cdots,b_n;t) = P(b_n,\cdots,b_1,b_0;1-t). \qquad (18)$$

利用 Bézier 曲线的定义马上可以证得(18)，也可以利用作图定理来证. 我们略去这些简单的证明，宁可费一些笔墨来说明(18)的意义.

Bézier 曲线是定向的曲线，参数 t 增长的方向决定着曲线的定向，由于这个理由，前面常常提到 $P(0)$ 是曲线的起点，$P(1)$ 是曲线的终点，等等. 从根本上说，控制点的排列顺序决定着曲线的定向. 公式(18) 的意义是：如果把控制点的顺序颠倒过来，得到的 Bézier 曲线与原来的曲线完全重合，但有相反的定向.

由公式(18) 立即得知，(17) 的右边可以写为

$$P(b_n,\cdots,b_1,b_0;(1-s)(1-t)),$$

利用已证之(16)，得到上式应当等于

$$P(b_n,b_{n-1}^{(1)},\cdots,b_1^{(n-1)},b_0^{(n)};1-s),$$

再一次利用(18) 得到

$$(17)\text{ 的右边} = P(b_0^{(n)},b_1^{(n-1)},\cdots,b_n;s),$$

最后的表达式正好是(17) 的左边.

定理 3.2 证毕.

分割定理是一个很重要的定理，有着众多的实际应用，我们对这个定理作下列详细的评注.

1. 只须利用 Bézier 曲线的端点性质，由分割定理便可推出作图定理. $b_0^{(n)}$ 作为第一段曲线的最后一个控制点和第二段曲线的第一个控制点，它应同时在这两段曲线上，也就是在原来的 Bézier 曲线上；其次，由端点切向量的性质可以推知，向量 $b_0^{(n-1)}b_0^{(n)}$ 是第一段曲线在终点 $b_0^{(n)}$ 上的切向量，而 $b_0^{(n)}b_1^{(n-1)}$ 是第二段曲线在起点 $b_0^{(n)}$ 处的切向量，从而 $b_0^{(n-1)}b_1^{(n-1)}$ 就是原来的 Bézier 曲线在 $P(t) = b_0^{(n)}$ 处的切向量.

2. 在讨论 Bézier 曲线时，我们总是把参数 t 限制在区间 $[0,1]$ 上，但是，Bézier 曲线作为多项式曲线，应当是对任何的参数值都有意义. 在分割定理的证明中，并未依赖参数 $t \in [0,1]$ 这一事实，因此，分割定理对于参数的任何取值都是正确的.

3. 在曲线的交互设计中，如果我们只对某条 Bézier 曲线上的某一段感兴趣而不是对整条曲线感兴趣，想要把这一段曲线保留下来，把其余部份全都删去，那么只要知道这一段曲线两个端点所对应的参数值，可以通过两次使用分割程序，计算出这段曲线对应的控制点，从而可以把这一段曲线当成一条独立的 Bézier 曲线来操作.

4. 由图 3.4 明显看出，分割之后得到的两个控制多边形比原来的控制多边形与 Bézier 曲线贴近得更好. 这就提示我们，应当把分割过程反复下去，即在两段曲线上分别再进行分割. 已经证明，如果分割点所对应的参数值在 $[0,1]$ 上稠密，则所得到的多边形序列将以很快的速度收敛到原来的 Bézier 曲线.

5. 仍由图 3.4 看出，两个小控制多边形的凸包之并集不但被包含于原来的控制多边形的凸包之内，而且前者比后者大为缩小. 这告诉我们，反复进行分割的过程，能够提供一种求两条 Bézier 曲线交点的更快、更有效的算法.

§ 5　光滑连接

在 CAGD 的应用中，为了设计一条比较复杂的曲线，不是无止境地增加控制点的个数，因为这样作将提高多项式曲线的次数，这是一种很不明智的选择. 通常，所使用的 Bézier 曲线不应超过 5 次，正确的做法是把整个曲线分成许多小段，用次数较

低的 Bézier 曲线来表示它们，当然在连接的地方应当保持适当的光滑性.

只需讨论两条 Bézier 曲线的光滑连接就已足够.

设想我们已有两条 n 阶 Bézier 曲线：

$$\boldsymbol{P}(t)=\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{b}_iB_i^n(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant 1$$

$$\boldsymbol{Q}(t)=\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{c}_iB_i^n(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

为方便起见，称它们分别为 $\boldsymbol{P}$ 曲线和 $\boldsymbol{Q}$ 曲线. 在讨论两条 Bézier 曲线相互关系的时候，设它们具有相同的次数并不失去一般性；因为当它们有不同的次数时，总可以利用升阶的技术把低次曲线的次数升高，直到两曲线同阶为止.

最初步的情况是，我们打算在 $\boldsymbol{P}$ 曲线的终点处接上 $\boldsymbol{Q}$ 曲线的起点. 用公式来表示乃是 $\boldsymbol{P}(1)=\boldsymbol{Q}(0)$，这等价于

$$\boldsymbol{c}_0=\boldsymbol{b}_n, \tag{19}$$

这时两条曲线没有断开，我们称之为有**零阶的几何连续**，用 GC^0 来表示. 图 3.5 表示 GC^0 的情况.

现在，若要求曲线 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 在交接点处不但是 GC^0 的而且还要求它们在交接点上有公共的切向，那么必须而且只须 $\boldsymbol{b}_n=\boldsymbol{c}_0$ 并且 $\boldsymbol{P}$ 的控制多边形的最后一边 $\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{b}_n-\boldsymbol{b}_{n-1}$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 的控制多边形的第一条边 $\boldsymbol{a}_1^*:=\boldsymbol{c}_1-\boldsymbol{c}_0$ 有相同的方向，即存在实数 $\alpha>0$ 使得

$$\boldsymbol{a}_1^*=\alpha\boldsymbol{a}_n\qquad(\alpha>0) \tag{20}$$

这种连接的方式称为一阶几何连续，简记为 GC^1. 总结起来，GC^1 的条件是

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{c}_0=\boldsymbol{b}_n\\&\boldsymbol{c}_1=\boldsymbol{c}_0+\alpha(\boldsymbol{b}_n-\boldsymbol{b}_{n-1})\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

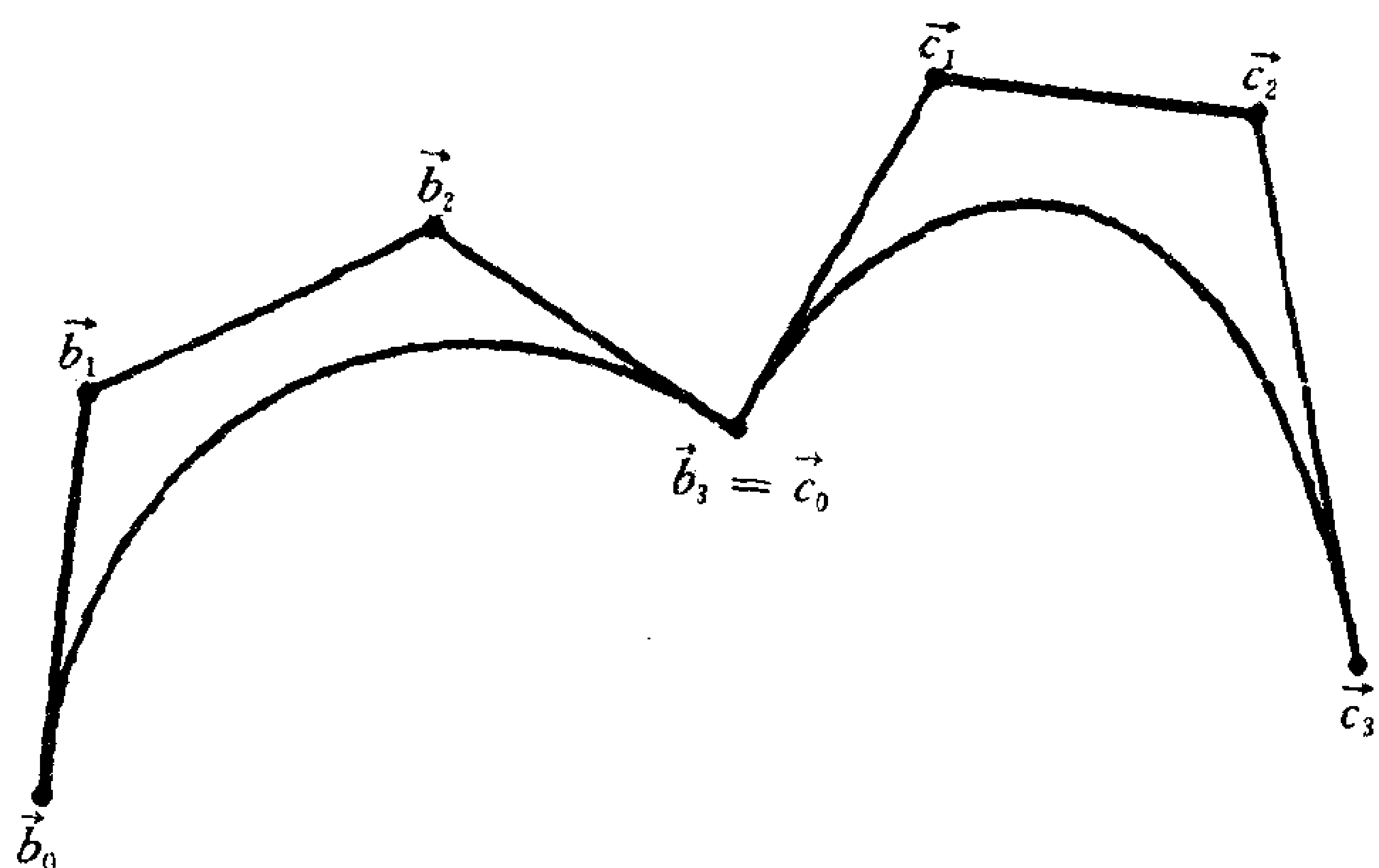


图 3.5 GC^0 连接

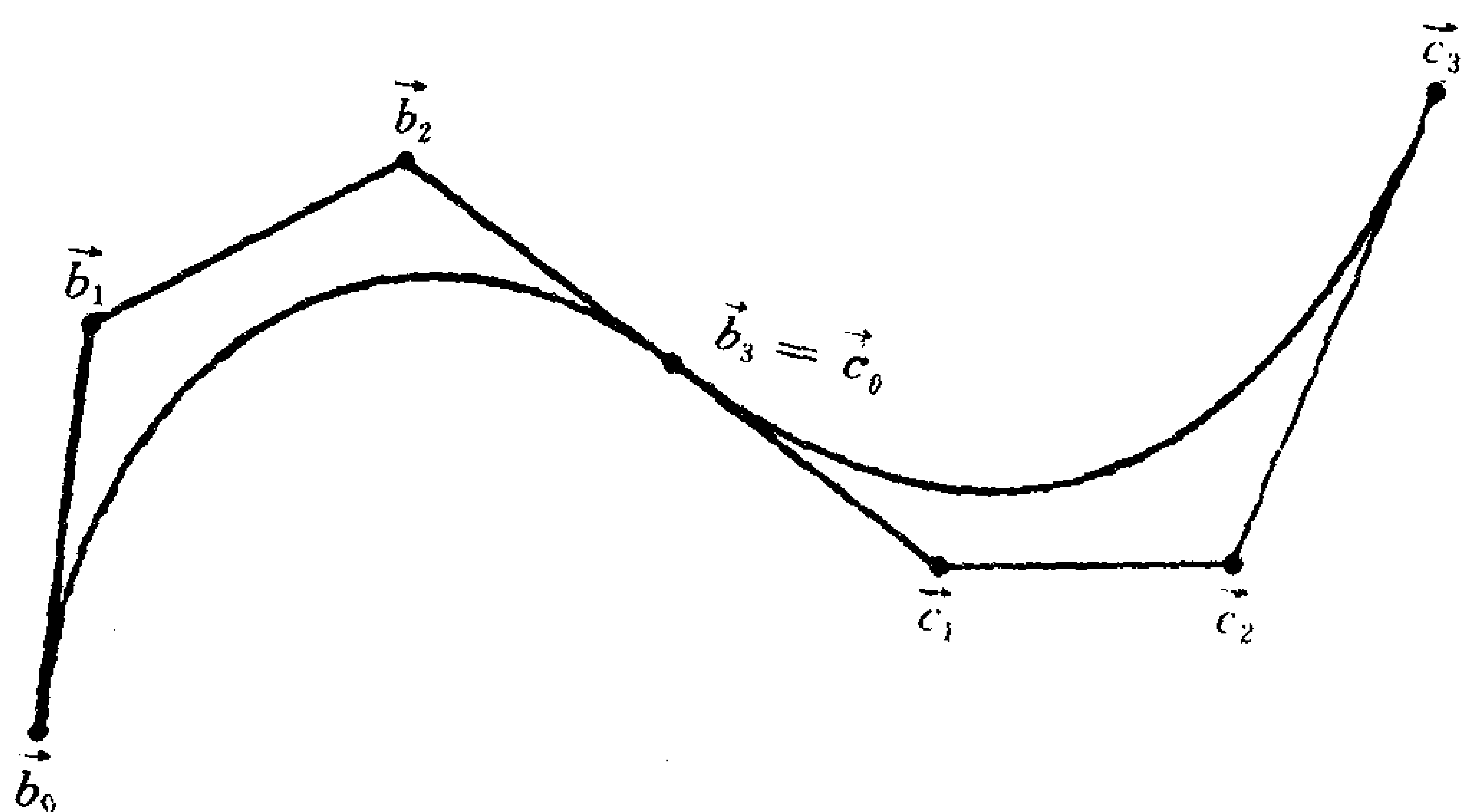


图 3.6 GC^1 连接

两条空间曲线 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 在交接点处达到二阶几何连续，或者说以 GC^2 方式连接，是指它们除了达到 GC^1 之外，在交接点处还要达到下列两个条件

(1) 密切平面重合，副法线向量相同；

(2) 曲率相等.

在点 $\boldsymbol{P}(1)$ 处，曲线 $\boldsymbol{P}$ 的副法线向量 $\gamma(1)$ 由 $\boldsymbol{P}'(1)\times\boldsymbol{P}''(1)$ 决定，由于

$$\boldsymbol{P}'(1)=n\boldsymbol{a}_n,\qquad \boldsymbol{P}''(1)=n(n-1)(\boldsymbol{a}_n-\boldsymbol{a}_{n-1}),$$

所以

$$\gamma(1):=\boldsymbol{p}'(1)\times\boldsymbol{p}''(1)=(n-1)n^2\boldsymbol{a}_{n-1}\times\boldsymbol{a}_n,$$

同理，曲线 $\boldsymbol{Q}$ 在点 $\boldsymbol{Q}(0)$ 处的副法线向量

$$\gamma^*(0)=(n-1)n^2\boldsymbol{a}_1^*\times\boldsymbol{a}_2^*,$$

这里 $\boldsymbol{a}_2^*:=\boldsymbol{c}_2-\boldsymbol{c}_1$.

条件(1)是指：四条边向量 $\boldsymbol{a}_{n-1},\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{a}_1^*,\boldsymbol{a}_2^*$ 共面. 由(20)可知，这一条件实际上相当于三个向量 $\boldsymbol{a}_{n-1},\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{a}_2^*$ 共面，因此 $\boldsymbol{a}_2^*$ 可表示为 $\boldsymbol{a}_{n-1},\boldsymbol{a}_n$ 的线性组合，即存在实数 β 与 η 使

$$\boldsymbol{a}_2^*=-\beta\boldsymbol{a}_{n-1}+\eta\boldsymbol{a}_n, \tag{22}$$

式中的数量 $\beta>0$，而 η 是任意的实数，见图 3.7.

按曲率的计算公式，曲线 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 在交接点处的曲率分别是

$$k=\frac{|\gamma(1)|}{|\boldsymbol{P}'(1)|^3}=\frac{(n-1)n^2|\boldsymbol{a}_{n-1}\times\boldsymbol{a}_n|}{n^3|\boldsymbol{a}_n|^3}$$

$$=\frac{(n-1)|\boldsymbol{a}_{n-1}\times\boldsymbol{a}_n|}{n|\boldsymbol{a}_n|^3}$$

$$k^*=\frac{|\gamma^*(0)|}{|\boldsymbol{Q}'(0)|}=\frac{(n-1)|\boldsymbol{a}^*\times\boldsymbol{a}_2^*|}{n|\boldsymbol{a}_1^*|^3}$$

把(20)及(22)代入上式右边，得到

$$k^*=\frac{(n-1)\alpha|\boldsymbol{a}_n\times(-\beta\boldsymbol{a}_{n-1}+\eta\boldsymbol{a}_n)|}{n\alpha^3|\boldsymbol{a}_n|^3}$$

$$=\frac{(n-1)\beta|\boldsymbol{a}_{n-1}\times\boldsymbol{a}_n|}{n\alpha^2|\boldsymbol{a}_n|^3}$$

由条件(2)，$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}^*$，得到

$$\beta=\alpha^2. \tag{23}$$

综上所述，两条空间 Bézier 曲线 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 在连接点上达到二阶几何连续的必要充分条件是(21)，(22) 与(23) 同时成立，合并起来可以写成

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1^* &= \alpha \boldsymbol{a}_n, \\ \boldsymbol{a}_2^* &= -\alpha^2 \boldsymbol{a}_{n-1} + \eta \boldsymbol{a}_n, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

其中实数 $\alpha > 0$ 而 η 是任意的实数. 图 3.7 表示了 GC^2 连接的情况.

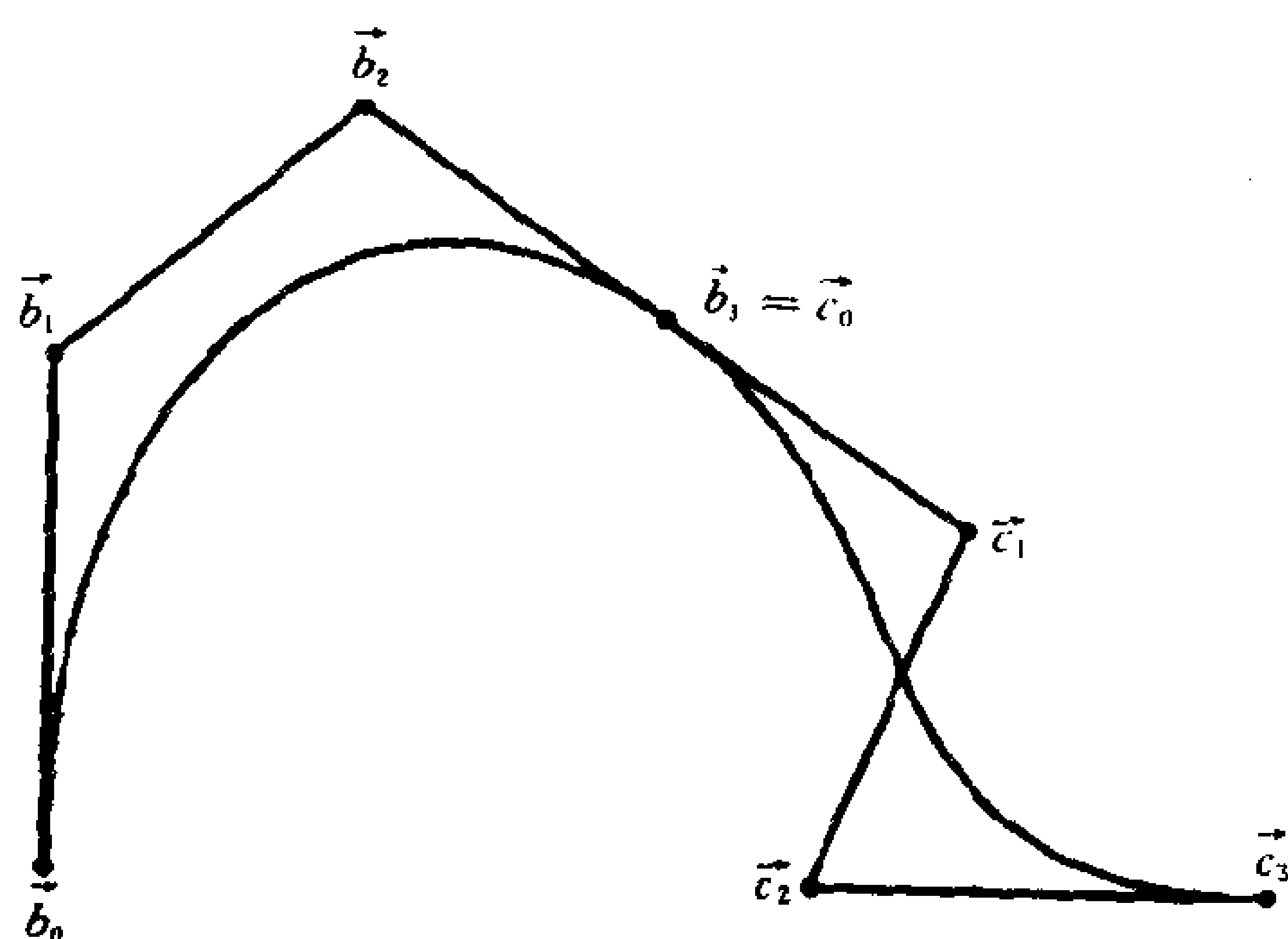


图 3.7 GC² 连接

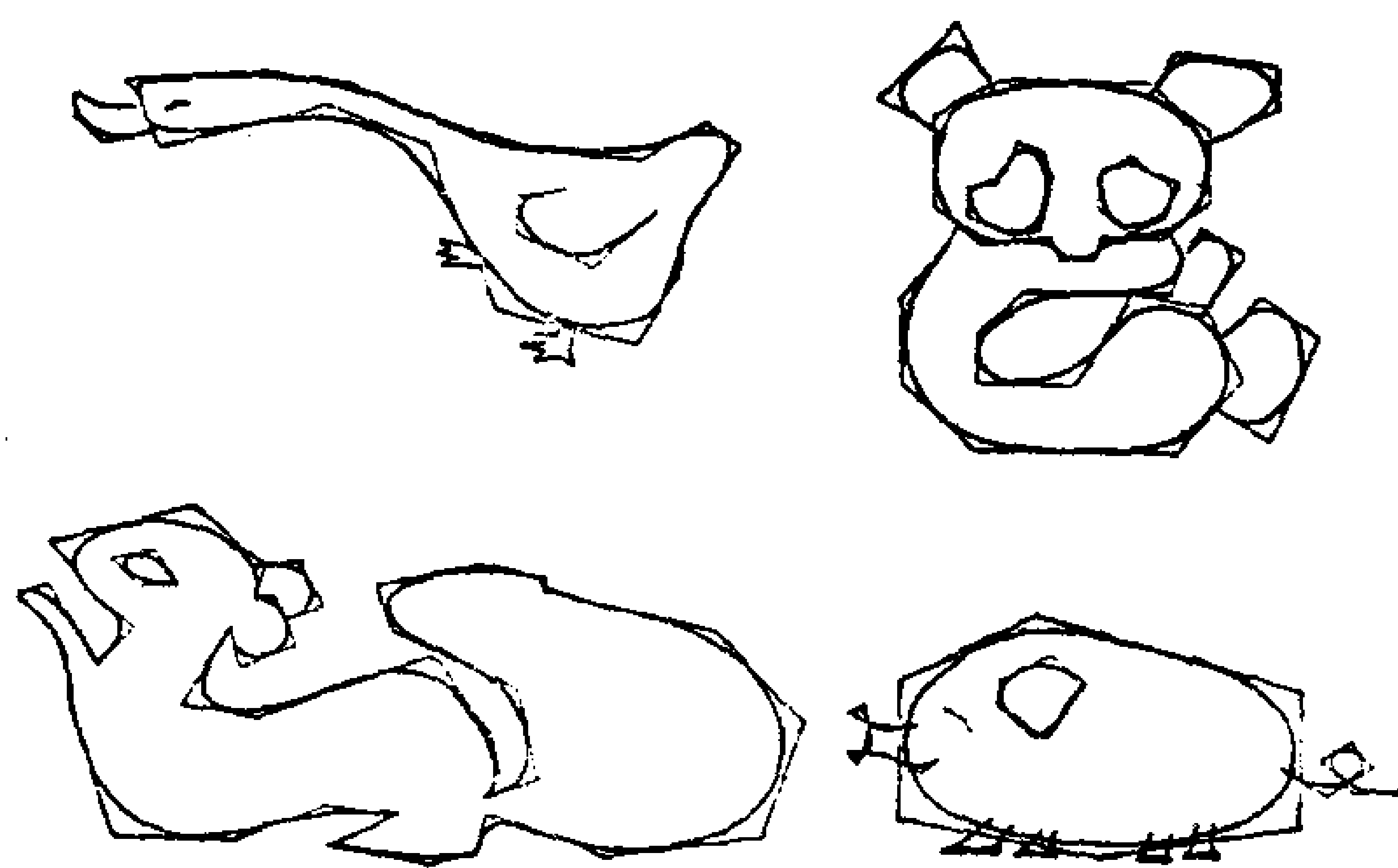


图 3.8 Bézier 样条曲线

把许多段 Bézier 曲线按照适当的几何连续性的要求拼接起来，得到的曲线称为 **Bézier 样条曲线**.

图 3.8 展示了用 Bézier 样条曲线画出的动物图案.

§ 6　平面 Bézier 曲线的保凸性

这一节仅讨论平面 Bézier 曲线，即一切控制点 $\boldsymbol{b}_i(i=0,1,\cdots,n)$ 共面.

由于 Bézier 曲线是向量值函数，因此前一章中关于"凸函数"的定义对它已不能适用. 我们必须首先寻找凸曲线的一个合理定义.

在本章的 §1 中已经定义过凸集. 现在我们给出

定义　一条连续的曲线段若是某一凸区域的一段边界，则称这一段曲线是凸的.

很明显，连续的凸函数在此定义之下是凸的. 同样明显的是，用一把刀按直线的路径将一个凸区域割去一部份，留下来的那一部份仍旧是凸区域.

控制多边形 $\boldsymbol{b}_0,\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_n$ 是凸的，当且只当把它的起点 $\boldsymbol{b}_0$ 与终点 $\boldsymbol{b}_n$ 用直线连接来之后所围成的多角形区域是凸的.

定理 3.3　(刘鼎元，Liu'84) 如果平面控制多边形是凸的，则对应的 Bézier 曲线也是凸的.

证明　由于控制多边形是凸的，这表明把它的首尾两个控制点用直线段连接起来围成了一个凸区域. 每一次升阶过程，如同用一把刀来进行若干次"割角"，因此留下来的仍是凸区域. 无限次地作下去，最终得到的也是一个凸区域. 由 Farin 的收敛

定理可知,Bézier 曲线正是这个凸区域的一段连续的边界,因此是凸曲线. 证完.

定理 3.3 揭示的是平面 Bézier 曲线的保凸性.

§ 7 结束语

Bézier 曲线实质上是向量值的 Bernstein 表达式,它的控制多边形与它本身有很强的相似性. 凸包性质、端点的插值性和切线的性质是这种相似性的若干表现. 控制多边形远比控制曲线来得容易,因此 Bézier 曲线成了工程技术人员设计曲线的得心应手的工具;自然,这种设计必须在交互式的图象仪的环境中进行.

在一个实用的、以 Bézier 方法为基础的程序系统中,必需包含给使用者带来方便的算法. 升阶的技巧增加了控制曲线的灵活性而且升阶控制多边形更好的表现了曲线的形状. 当升阶进行到足够多次时,升阶多边形是对其 Bézier 曲线的一个很好的逼近. de Casteljau 算法是反复进行线性插值的过程,得出的是 Bézier 曲面上的一个点;如果这种点分布得足够细密,屏幕上显示出来的将是由线性插值产生出的 Bézier 曲线,分割定理是 de Casteljau 算法的发展,因此其意义更为重要,利用 GC^1 或 GC^2 的条件,我们可以把许多段次数较低的 Bézier 曲线连接起来,作成 Bézier 样条曲线,以产生十分复杂的曲线.

定理 3.3 是一个理论结果,它说的是平面上凸的控制多边形必然生成凸的 Bézier 曲线,这就是平面 Bézier 曲线的保凸性,它也可以作为设计一条平面凸曲线的依据.

第四章　有理 Bézier 曲线

本章的第一部份是用三次 Bézier 曲线来逼近单位圆在第一象限中的那一部分. 让 Bézier 曲线与该段圆弧有相同的起点与终点,并且在这两点分别相切,留下的只是一个可以变化的参数. 通过调整这个参数,三次 Bézier 曲线将会取得各种形状. 从中我们也可以选出一个逼近得最好的曲线,并作出误差估计. 在这个参数变化时, 曲线上会出现**拐点**、**尖点**和**二重点**. 这就具体地说明了,即使平面三次 Bézier 曲线,也是非常灵活的曲线.

但是,多项式的 Bézier 曲线不能精确地表示圆周,为此,我们讨论 Bézier 曲线的推广,即**有理 Bézier 曲线**. 通过增加若干个"权",便大大地增加了曲线的灵活性. 最后,我们用三次 Bézier 曲线来精确地表示单位圆的一部分.

§1　逼近四分之一圆周

考察圆心在原点、半径为 1 的圆周,更确切地说,我们只关

心它在第一象限的那一部份(图 4.1),以反时针方向为它的定向.我们打算用三次 Bézier 曲线去逼近它.设 Bézier 曲线的控制点为 $\boldsymbol{b}_0,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$(图 4.2).由端点的插值性质和切向性质,立即可知

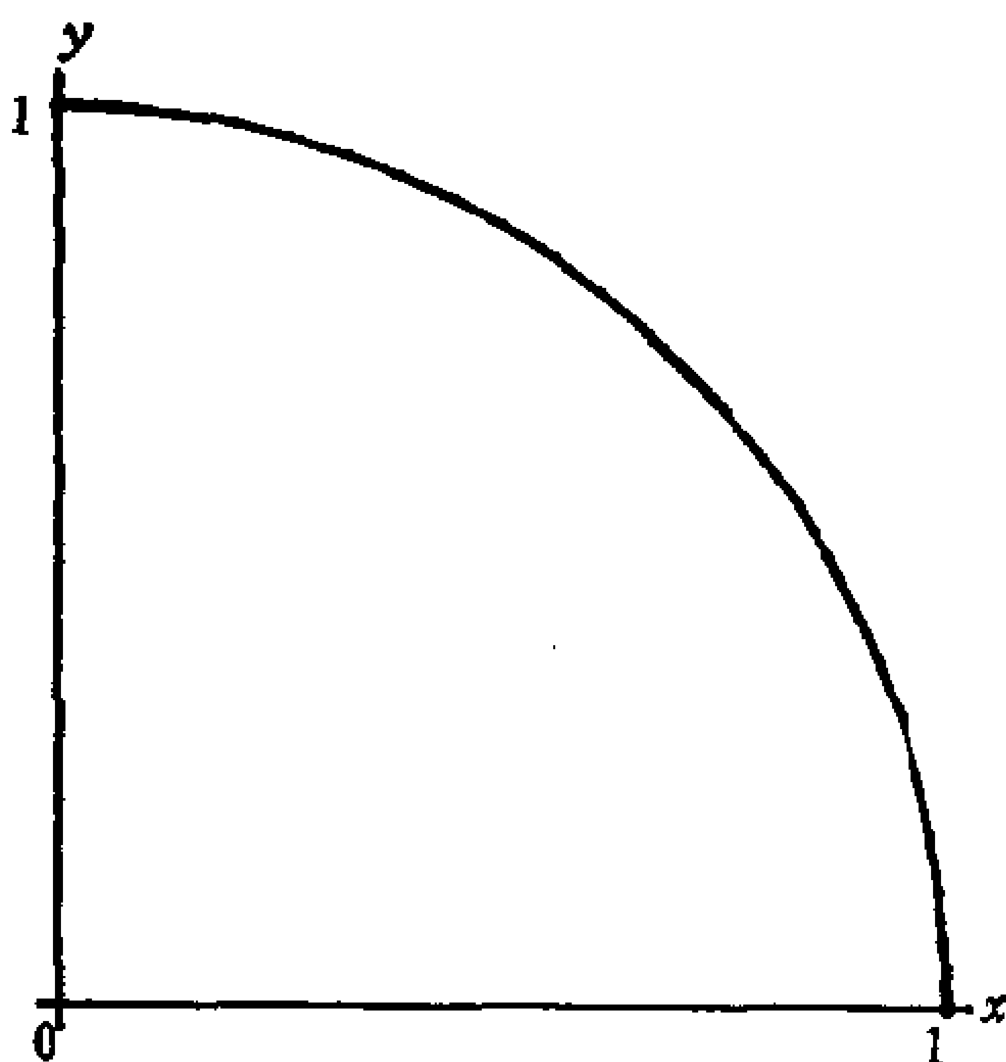


图 4.1 单位圆在第一象限的一段圆弧

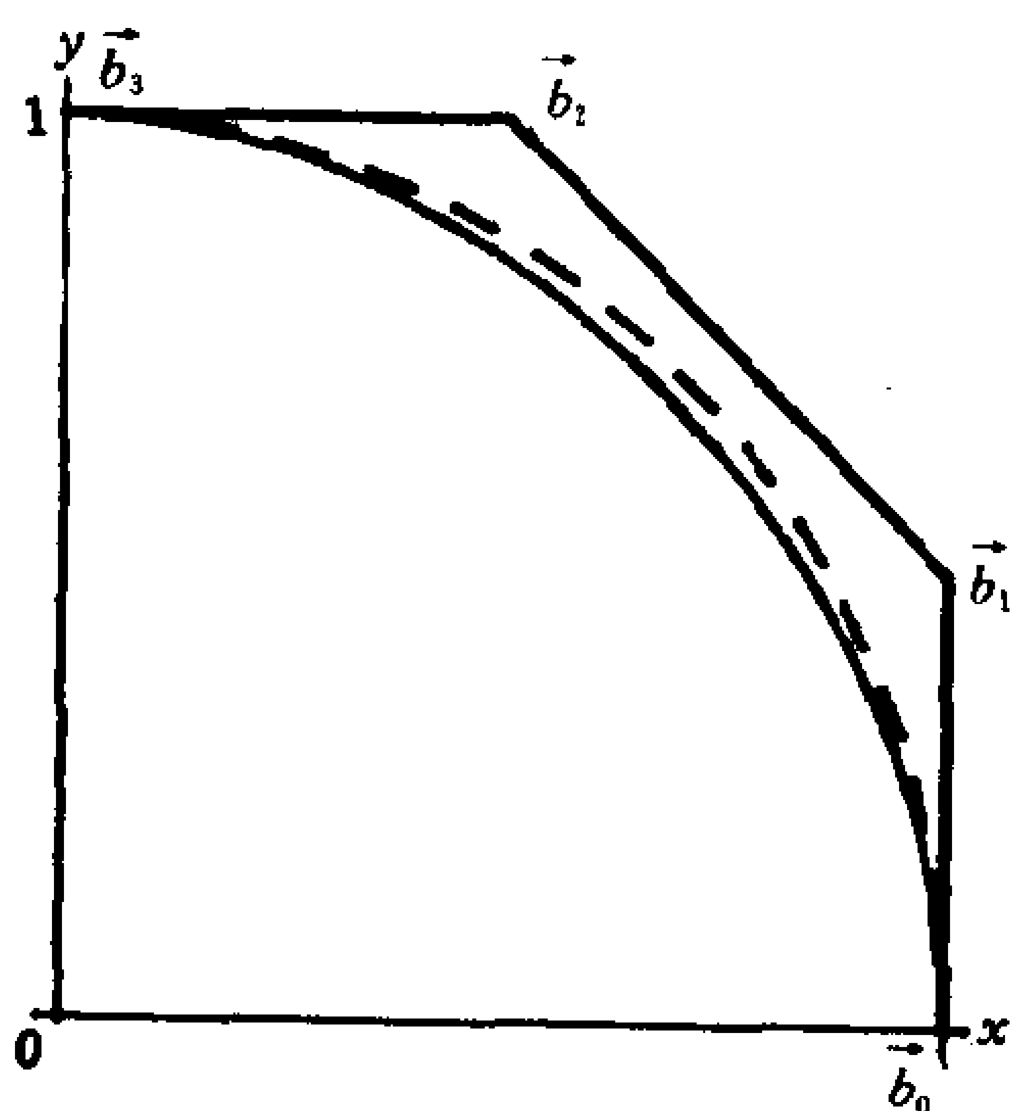


图 4.2 用三次 Bézier 曲线逼近圆弧

$$\boldsymbol{b}_0 = (1,0),$$

$$\boldsymbol{b}_1 = (1,\lambda),$$

$$\boldsymbol{b}_2 = (\lambda,1),$$

$$\boldsymbol{b}_3 = (0,1),$$

其中 $\lambda \geqslant 0$ 是可变的参数，几何上看，λ 代表着控制多边形的第一边与第三边的长度. 对应的 Bézier 曲线是

$$\boldsymbol{P}(t) = \sum_{i=0}^{3} \boldsymbol{b}_i B_i^3(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1 \tag{1}$$

若用分量把(1) 写出来，即得

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= (1,1,\lambda,0) \\ y(t) &= (0,\lambda,1,1) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

这里用了第二章中定义的 Bernstein 形式的简便记号.

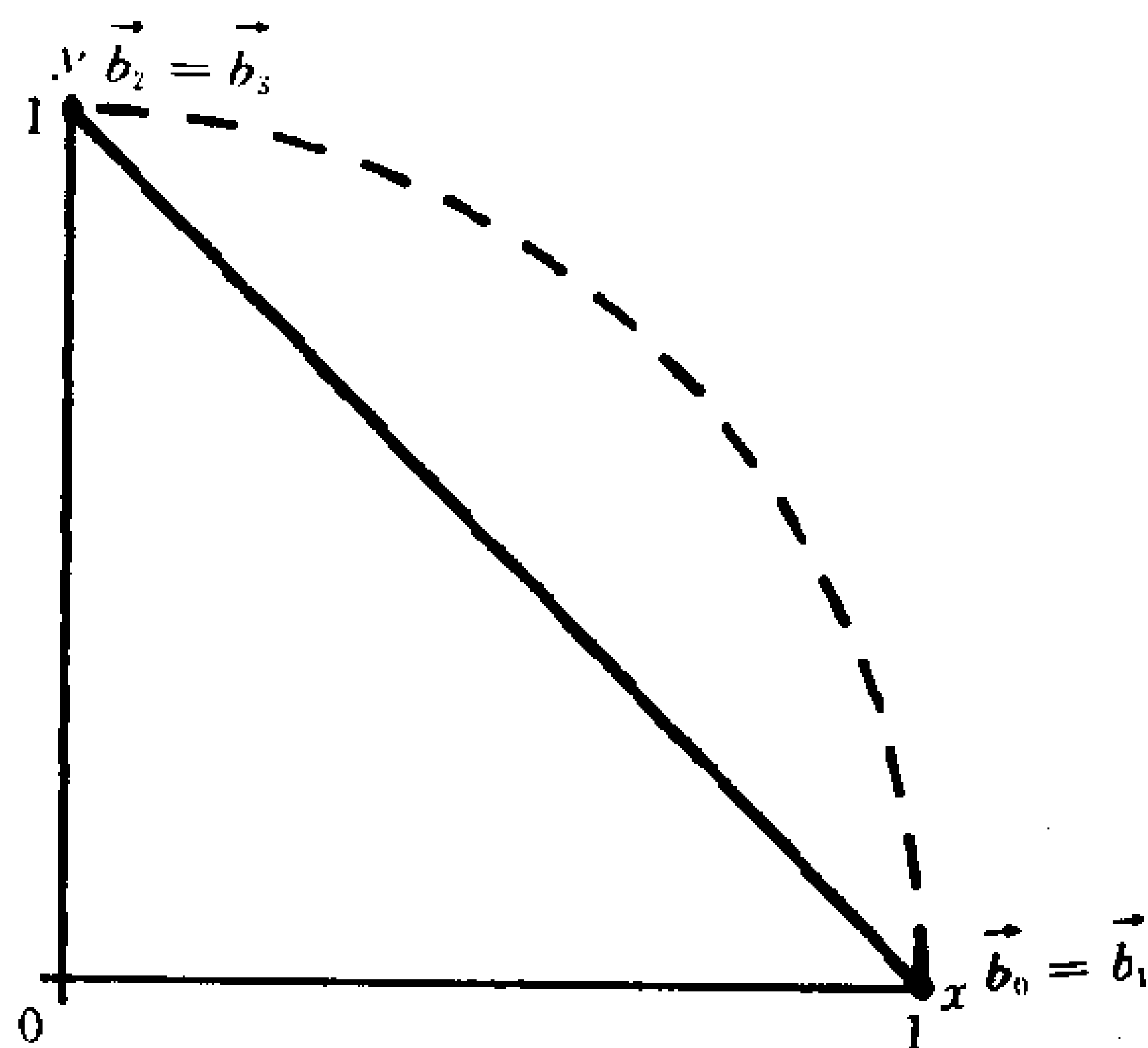


图 4.3　$\lambda = 0$ 时的 Bézier 曲线

当 $\lambda = 0$ 时，由(2) 可见 $x(t) + y(t) = 1$，这时(1) 代表由两点(1,0) 与(0,1) 联成的直线段，与单位圆周相去甚远(图 4.3). 因此设 $\lambda > 0$.

通过选取 λ 的值，可以改变曲线的形状. 直观上看，如果选择 λ 以使得 Bézier 曲线当 $t = 1/2$ 时为圆弧的中点，可望得到较好的逼近效果. 因此，令 $x(0.5) = y(0.5) = \sqrt{2}/2$，即

$$B_0^3\left(\frac{1}{2}\right) + B_1^3\left(\frac{1}{2}\right) + \lambda B_2^3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

由此解出

$$\lambda = \lambda_0 := \frac{4}{3}(\sqrt{2} - 1) = 0.55228475\cdots \tag{3}$$

从图 4.4 可以看出，当 λ 取由(3) 所决定的值 λ_0 时所得到的曲线与真正圆弧的偏差，肉眼是无法分辨的.

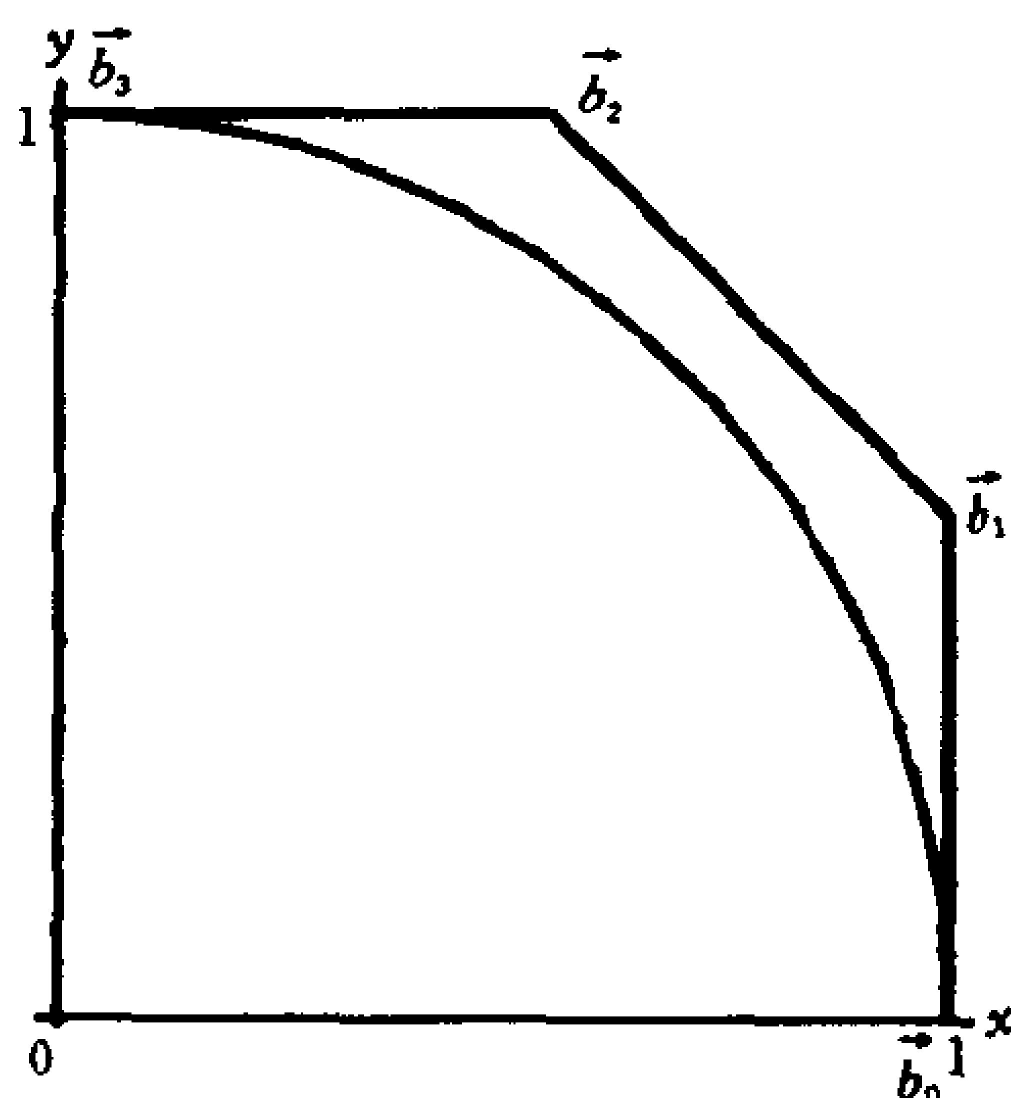


图 4.4 $\lambda_0 = 4(\sqrt{2} - 1)/3$ 时的 Bézier 曲线

下面来作误差分析. 很明显，取

$$\varepsilon(t) := x^2(t) + y^2(t) - 1 \tag{4}$$

作为偏差的一种度量是合理的. 注意到

$$\left.\begin{aligned} &x(0) = y(1) = 1, \\ &x(1) = y(0) = 0, \\ &x'(0) = y'(1) = 0, \\ &x(0.5) = y(0.5) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ &x'(0.5) + y'(0.5) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

可见

$$\varepsilon(0) = \varepsilon(0.5) = \varepsilon(1) = 0,$$

即 0，0.5 及 1 是 $\varepsilon(t)$ 的三个零点，又由于

$$\varepsilon'(t) = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t),$$

再由(5)可知

$$\varepsilon'(0) = \varepsilon'(0.5) = \varepsilon'(1) = 0,$$

这表明0,0.5及1都是$\varepsilon(t)$的二重零点. 由于$\varepsilon(t)$是t的6次多项式,我们有下列的分解式

$$\varepsilon(t) = At^2(t-1/2)^2(t-1)^2 \tag{6}$$

其中A是一个常数. 算出$\varepsilon(t)$中的t的最高次方的系数,便可定出

$$A = 2(3\lambda_0 - 2)^2 = 8(3 - 2\sqrt{2})^2 = 0.235498012\cdots$$

由(6)可知$\varepsilon(t) \geqslant 0$,即曲线上的每一点到圆心的距离总不小于圆的半径. 由于当$t \in [0,1]$时

$$t(1-t) \leqslant \frac{1}{4}, \left|t - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2},$$

从(6)得出

$$0 \leqslant \varepsilon(t) \leqslant \frac{A}{64} = 0.003679656\cdots$$

可以证明,选择$\lambda = \lambda_0$产生的曲线在某种意义之下是对圆弧的最佳逼近,但我们不能在此进行深入的探讨.

现在,增大$\lambda(>\lambda_0)$的数值来看看逼近曲线的变化. 首先取$\lambda = 2/3$,这时的4个控制点是

$$\boldsymbol{b}_0 = (1,0), \boldsymbol{b}_1 = \left(1, \frac{2}{3}\right), \boldsymbol{b}_2 = \left(\frac{2}{3}, 1\right), \boldsymbol{b}_3 = (0,1).$$

容易算出

$$x(t) = 1 - t^2 = B_0^2(t) + B_1^2(t)$$

$$y(t) = 2t - t^2 = B_1^2(t) + B_2^2(t),$$

这说明我们的逼近曲线是可降阶的,它实际上是二次 Bézier 曲线

$$(1,0)B_0^2(t) + (1,1)B_1^2(t) + (0,1)B_2^2(t),$$

其控制点为(1,0),(1,1),(0,1). 该曲线是一条抛物线(见图

4.5).

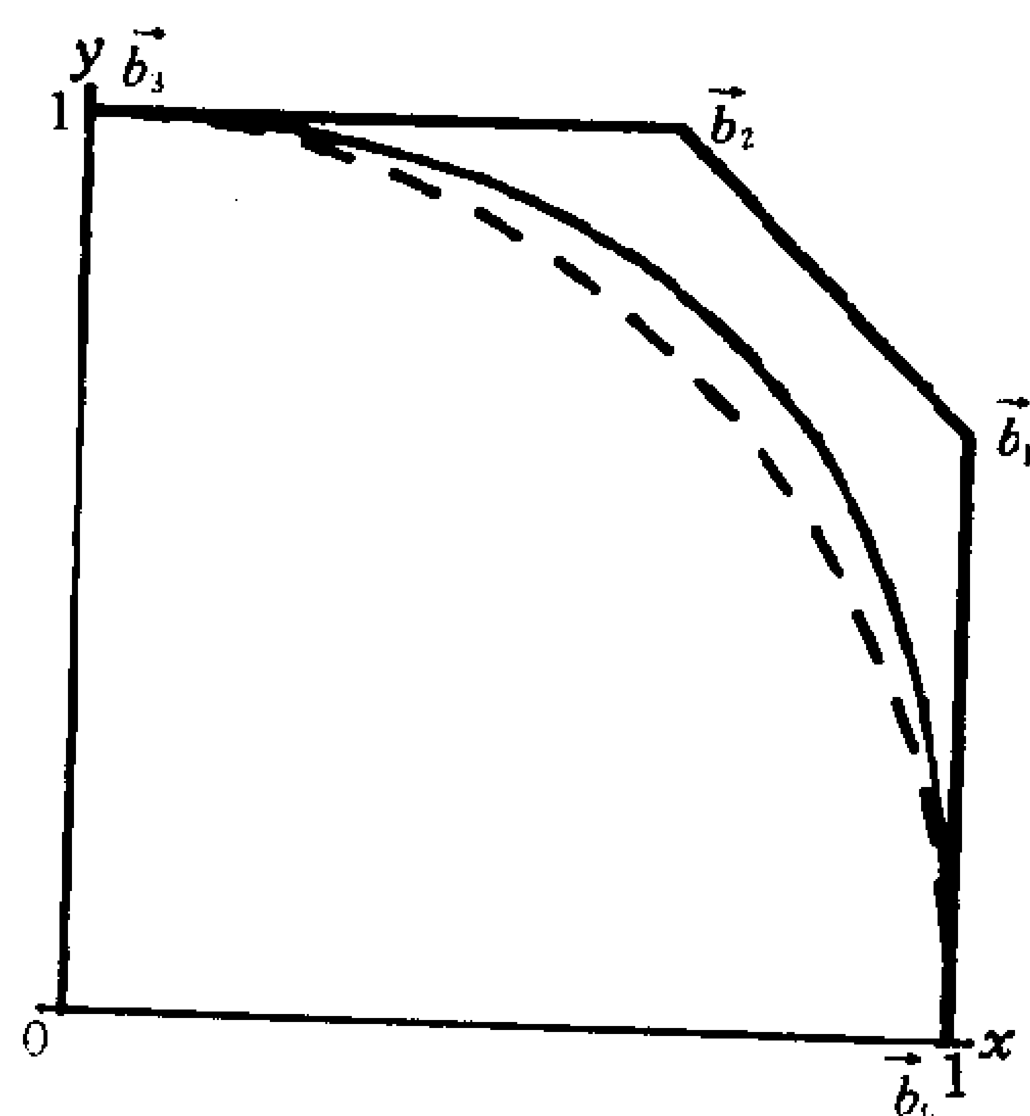


图 4.5 $\lambda = 2/3$，退化情况

再取 $\lambda = 1$. 这时 4 个控制点是

$$\boldsymbol{b}_0 = (1,0), \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_2 = (1,1), \boldsymbol{b}_3 = (0,1),$$

其中第二个与第三个控制点重合. 控制点生成的凸包是以 (1,0),(1,1),(0,1) 为顶点的等腰直角三角形，逼近曲线完全落在它的内部(见图 4.6).

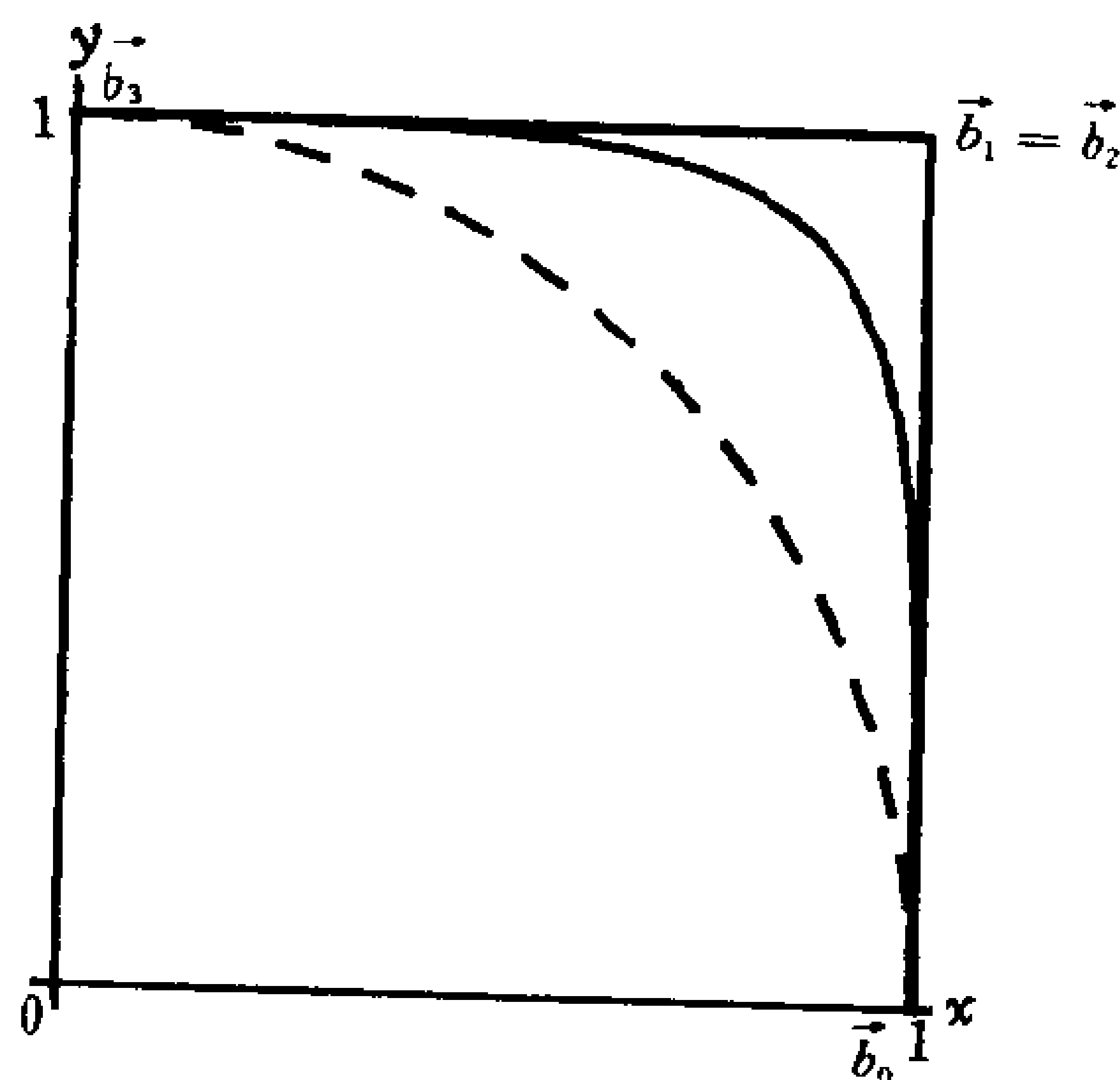


图 4.6 $\lambda=1$ 时的 Bézier 曲线

下面讨论 $\lambda>1$ 的情形，这时控制多边形出现了自交的情况，图 4.7 显示出 $\lambda=4/3$ 时对应的控制多边形和逼近曲线，计算表明，这时有 $x(0.5)=y(0.5)=1$．在这条曲线上，可以看到：在标有“×”的两点上，曲线的“凸凹性”有一个突然的改变，这样的点称为曲线的**拐点**．

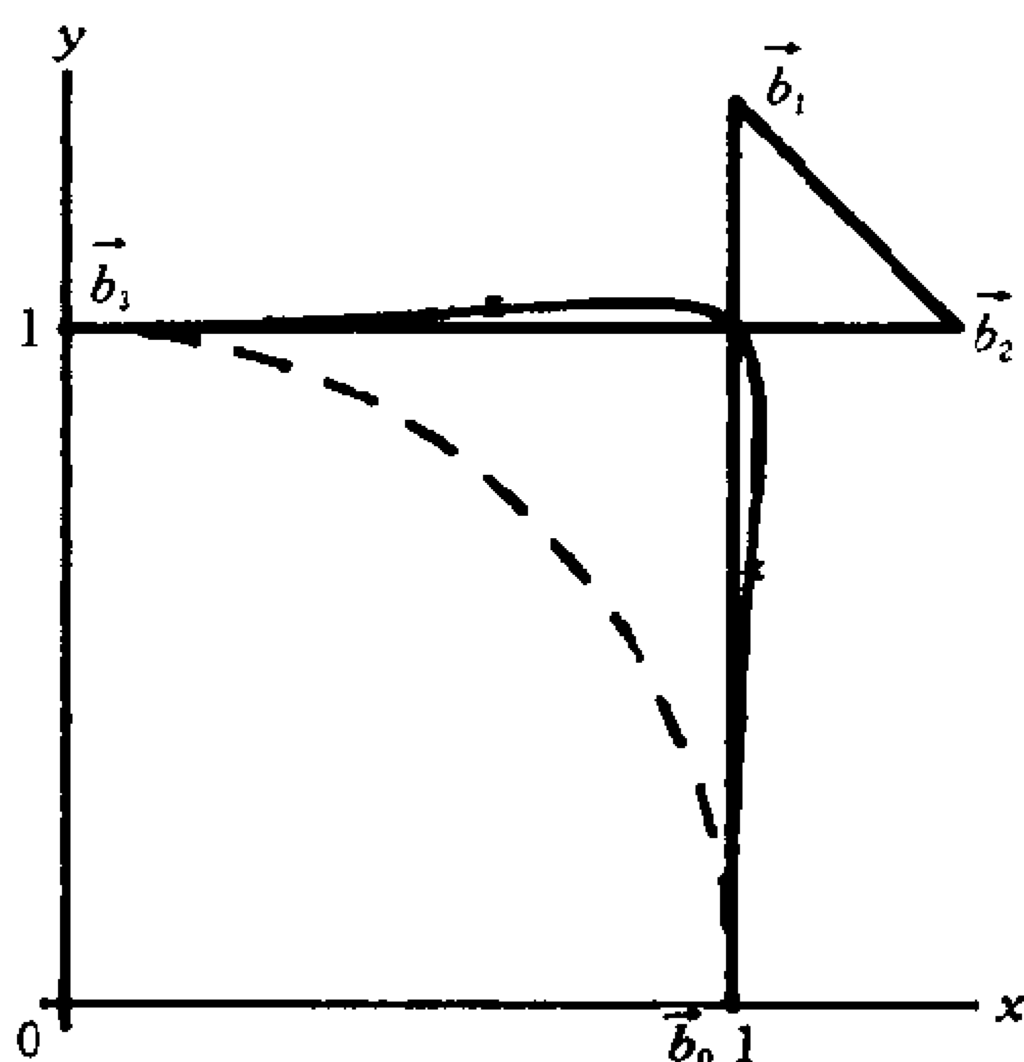


图 4.7　λ=4/3 时的 Bézier 曲线

当平面曲线 Γ 有向量方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t))$ 的表示时（这里的 x，y 不必为 t 的多项式函数），根据微分几何知识，要从方程

$$\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix} = 0 \qquad (7)$$

的根里去找拐点对应的参数值．如果 t_0 是（7）的一个根，并且在 t_0 的两旁，（7）式左边的二阶行列式有相反的符号时，那么 $\boldsymbol{r}(t_0)$ 就是曲线 Γ 的一个拐点．

现在，把这个一般的理论落实到我们当前的三次 Bézier 曲线上．这里，采用 Bernstein 形式，我们有

$x'=3\ (0,\ \lambda-1,\ -\lambda)$，

$x''=6\ (\lambda-1,\ 1-2\lambda)$，

$$y'=3\ (\lambda,\ 1-\lambda,\ 0),$$
$$y''=6\ (1-2\lambda,\ \lambda-1),$$
经过耐心的计算，可知方程（7）变为
$$t^2-t+\frac{\lambda-1}{3\lambda-2}=0. \tag{8}$$
由(8)解出两根
$$t_1,t_2=\frac{1}{2}\left[1\pm\sqrt{\frac{2-\lambda}{3\lambda-2}}\right]. \tag{9}$$
为了要使 t_1，t_2 在（0，1）中，必须且只须
$$0\leqslant\frac{2-\lambda}{3\lambda-2}<1,$$
解这个不等式得 $1<\lambda\leqslant 2$. 但是，由(9)可见，只有当 $\lambda\in(1,2)$ 时两根 t_1，t_2 不相等，它们对应的点才是拐点；当 $\lambda=2$ 时 $t_1=t_2$，这时没有拐点.

现在考察 $\lambda=2$. 这时
$$x'\left(\frac{1}{2}\right)=y'\left(\frac{1}{2}\right)=0,$$
即 $\boldsymbol{P}'\left(\frac{1}{2}\right)=0$. 这时曲线上的点 $\boldsymbol{P}\left(\frac{1}{2}\right)$ 称为**尖点**（见图 4.8).

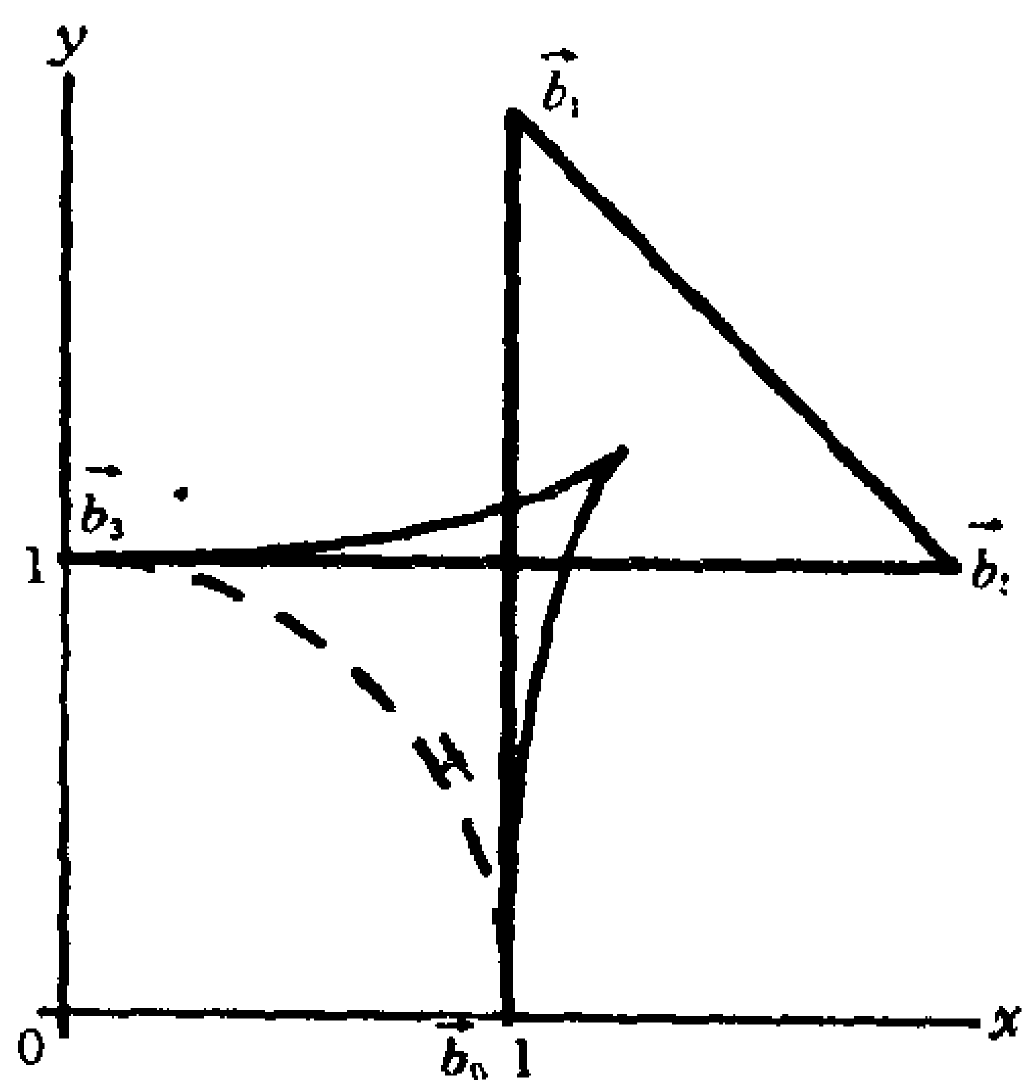


图 4.8　λ=2时曲线上有一个尖点

当 $\lambda>2$ 时，曲线上会出现圈，即曲线自己与自己相交，也就是说在 (0, 1) 中有两个不同的参数值 $t_1 \neq t_2$ 而使得 $\boldsymbol{P}(t_1)=\boldsymbol{P}(t_2)$. 这种自交点称为曲线的**二重点**. (图 4.9)

尖点与二重点统称曲线的**奇点**.

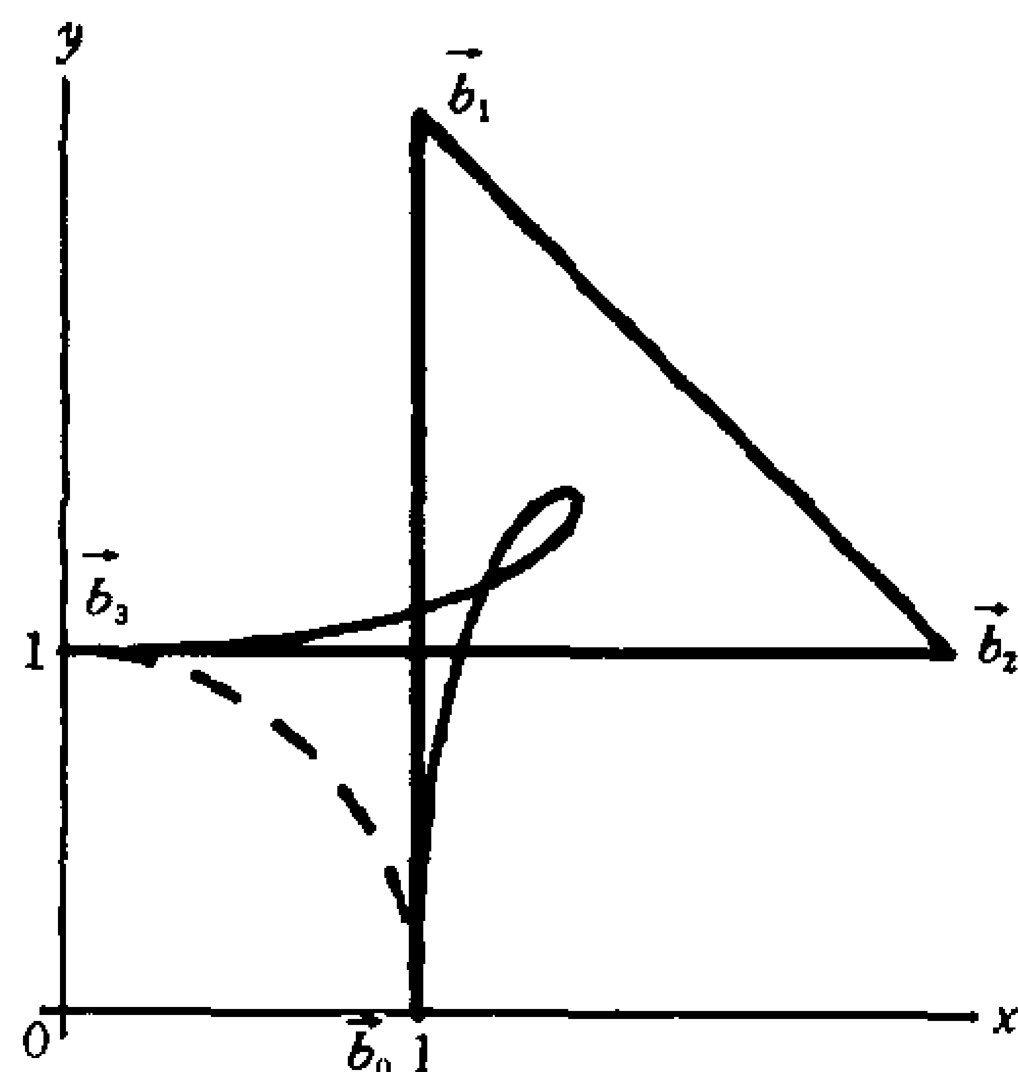


图 4.9　$\lambda=2.5$ 时曲线上有一个二重点

经过以上的讨论，我们看到，三次 Bézier 曲线，即使是平面情形，表现力也非常丰富，能产生出千姿百态的几何形状. 当 λ 取值 λ_0 时，所得的曲线是单位圆的一部分的一个很好的近似或逼近. 如果把四条这样的曲线按右图拼接起来，得到的一条封闭的 GC^1 连续的曲线，它是单位圆的一个很好的逼近.

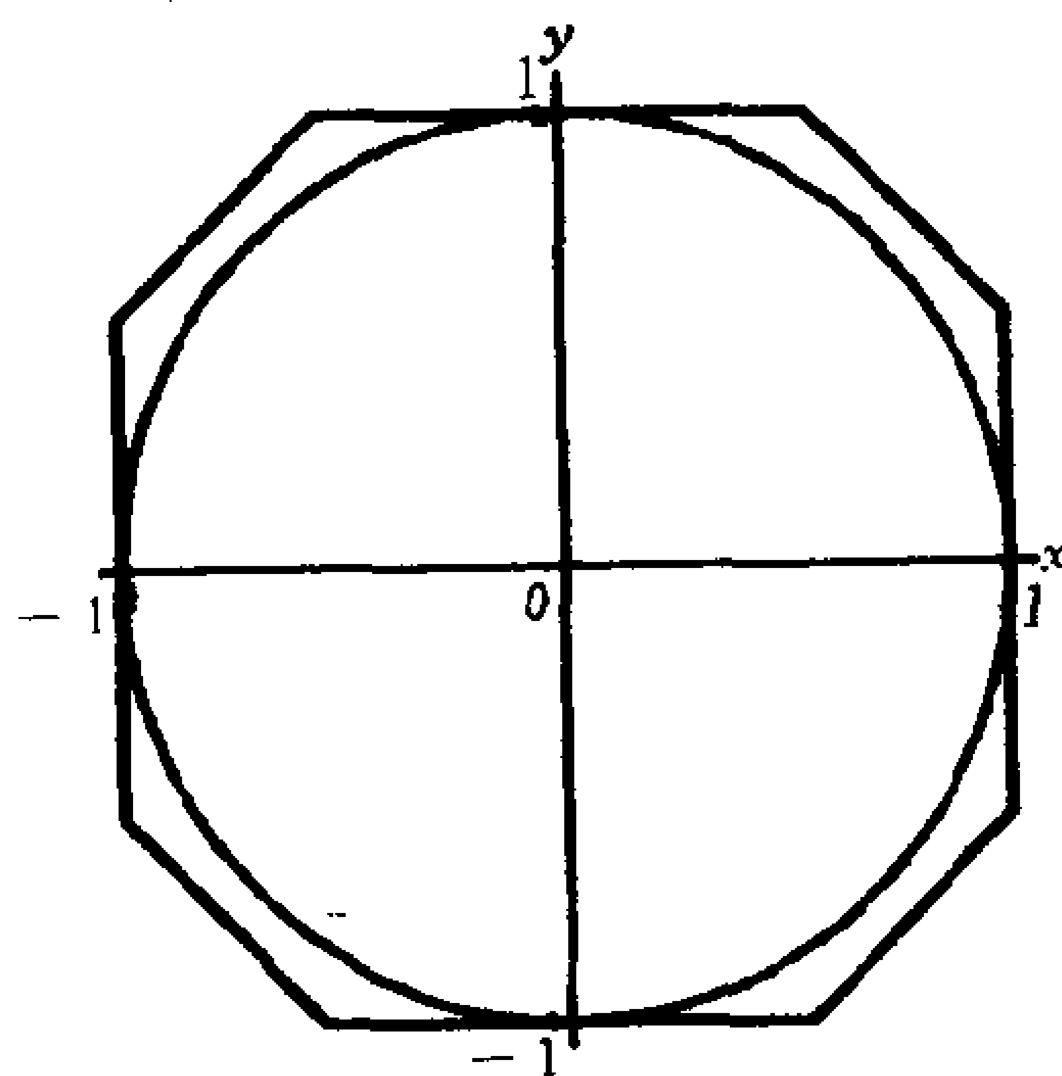


图 4.10　用 GC^1 曲线逼近单位圆

但是，如果局限在多项式 Bézier 曲线之中，则永远不能精确地表示圆周的一部份. 为了克服这一缺点，有必要把第三章

讨论过的 Bézier 曲线加以推广，这就是下一节中将讨论的有理 Bézier 曲线.

§2 有理 Bézier 曲线

给定 $n+1$ 个空间向量 $\boldsymbol{b}_0$，$\boldsymbol{b}_1$，…，$\boldsymbol{b}_n$ 以及实数 ω_0，ω_1，…，ω_n，其中 $\omega_i>0$，$i=0$，1，…，n，$\omega_0+\omega_1+\cdots+\omega_n>0$，称

$$\boldsymbol{R}(t)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\omega_i\boldsymbol{b}_iB_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n}\omega_iB_i^n(t)},\qquad 0\leqslant t\leqslant 1,\tag{10}$$

为 n 阶有理 Bézier 曲线，其中 $\{\boldsymbol{b}_i\}$ 称为曲线（10）的**控制点**，$\{\omega_i\}$ 称为**权**或**权系数**，$i=0$，1，…，n. 容易看出，当所有的权系数都相等：$\omega_0=\omega_1=\cdots=\omega_n$ 时，有理曲线（10）即变成通常的 Bézier 曲线. 因此，有理 Bézier 曲线是（多项式）Bézier 曲线的推广.

如果引入

$$R_i^n(t):=\frac{\omega_iB_i^n(t)}{\sum_{k=0}^{n}\omega_kB_k^n(t)},\tag{11}$$

$i=0$，1，…，n，则（10）便可以写成

$$\boldsymbol{R}(t)=\sum_{i=0}^{n}R_i^n(t)\boldsymbol{b}_i,\tag{12}$$

式（11）定义的 $\{R_i^n(t)\},i=0,1,\cdots,n$，称为**有理基函数**.

有理基函数有如下的明显的性质：

1) $R_i^n(t)\geqslant 0,\quad t\in[0,1],\quad i=0,1,\cdots,n,$

2) $\sum_{i=0}^{n}R_i^n(t)=1.$

由于以上两条性质，由(12) 可知，有理 Bézier 曲线也具有凸包性质：曲线(10) 完全被包含在由其控制点所生成的凸包之中.

由于

$$R_i^n(0) = \frac{\omega_i B_i^n(0)}{\omega_0} = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 0, & i = 1,2,\cdots,n, \end{cases}$$

$$R_i^n(1) = \frac{\omega_i B_i^n(1)}{\omega_n} = \begin{cases} 0, & i = 0,1,\cdots,n-1, \\ 1, & i = n, \end{cases}$$

从 (12) 得知

$$\boldsymbol{R}(0) = \boldsymbol{b}_0, \qquad \boldsymbol{R}(1) = \boldsymbol{b}_n, \tag{13}$$

这就是说有理 Bézier 曲线在两端点处也插值于**控制多边形**的端点，这里所说的控制多边形即由顺次联结控制点所成的开多边形，与 Bézier 曲线的控制多边形没有区别.

引入记号

$$\omega(t) := \sum_{k=0}^{n} \omega_k B_k^n(t),$$

把 (12) 改写为

$$\omega(t)\boldsymbol{R}(t) = \sum_{i=0}^{n} \omega_i \boldsymbol{B}_i^n(t)\boldsymbol{b}_i,$$

在上式双方对 t 求导，有

$$\omega'(t)\boldsymbol{R}(t) + \omega(t)\boldsymbol{R}'(t) = n\sum_{i=0}^{n-1}(\omega_{i+1}\boldsymbol{b}_{i+1} - \omega_i\boldsymbol{b}_i)B_i^{n-1}(t),$$

将 $t=0$ 代入上式双方，利用 (13) 便可得到

$$n(\omega_1 - \omega_0)\boldsymbol{b}_0 + \omega_0\boldsymbol{R}'(0) = n(\omega_1\boldsymbol{b}_1 - \omega_0\boldsymbol{b}_0),$$

由上式得

$$\boldsymbol{R}'(0) = \frac{n\omega_1}{\omega_0}(\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_0). \tag{14}$$

类似地有

$$\boldsymbol{R}'(1) = \frac{n\omega_{n-1}}{\omega_n}(\boldsymbol{b}_n - \boldsymbol{b}_{n-1}). \tag{15}$$

公式（14）与（15）表明，有理 Bézier 曲线在其起点与终点上分别与其控制多边形的第一边与最后一边相切.

以上谈到的这些性质，正是 Bézier 多项式曲线所具有的性质.

如果我们愿意，也可以对有理 Bézier 曲线建立 de Casteljau 算法、升阶技术等等. 由于我们在本章中不需要它们，故从略.

最后，我们定性地描述一下权系数的作用. 大体上说，增加权系数 ω_i 的数值，相当于把曲线拉得更近于控制点 $\boldsymbol{b}_i$，减少 ω_i 的数值则相当于减低控制点 $\boldsymbol{b}_i$ 对曲线的影响.

图 4.11 与 4.12 画出两条有理 Bézier 曲线，在每一个控制点的后边，写上了相应的权系数的值.

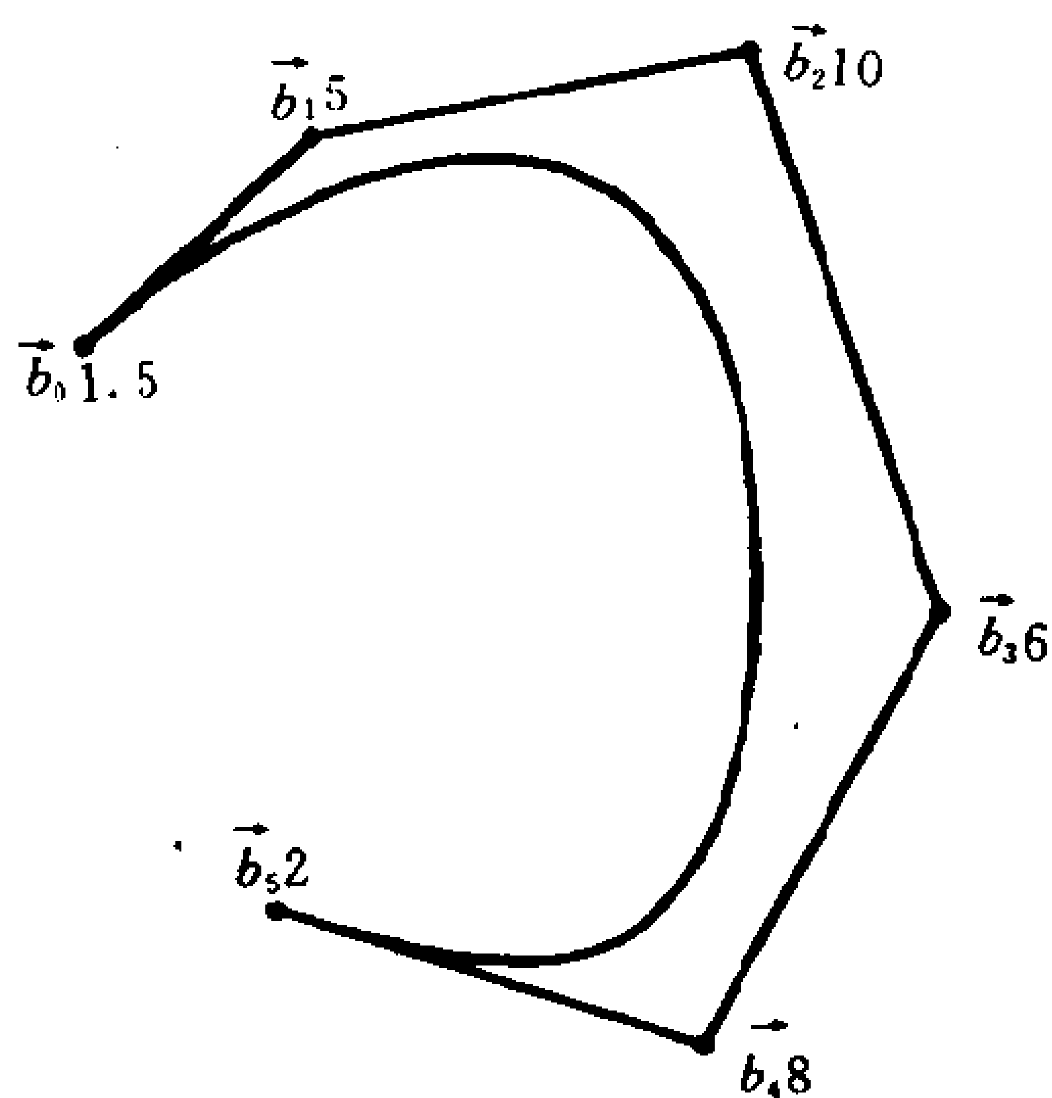


图 4.11　有理 Bézier 曲线

§3　圆弧的精确表示

在本节中我们将看到，利用三次有理 Bézier 曲线可以精确地表示圆弧.

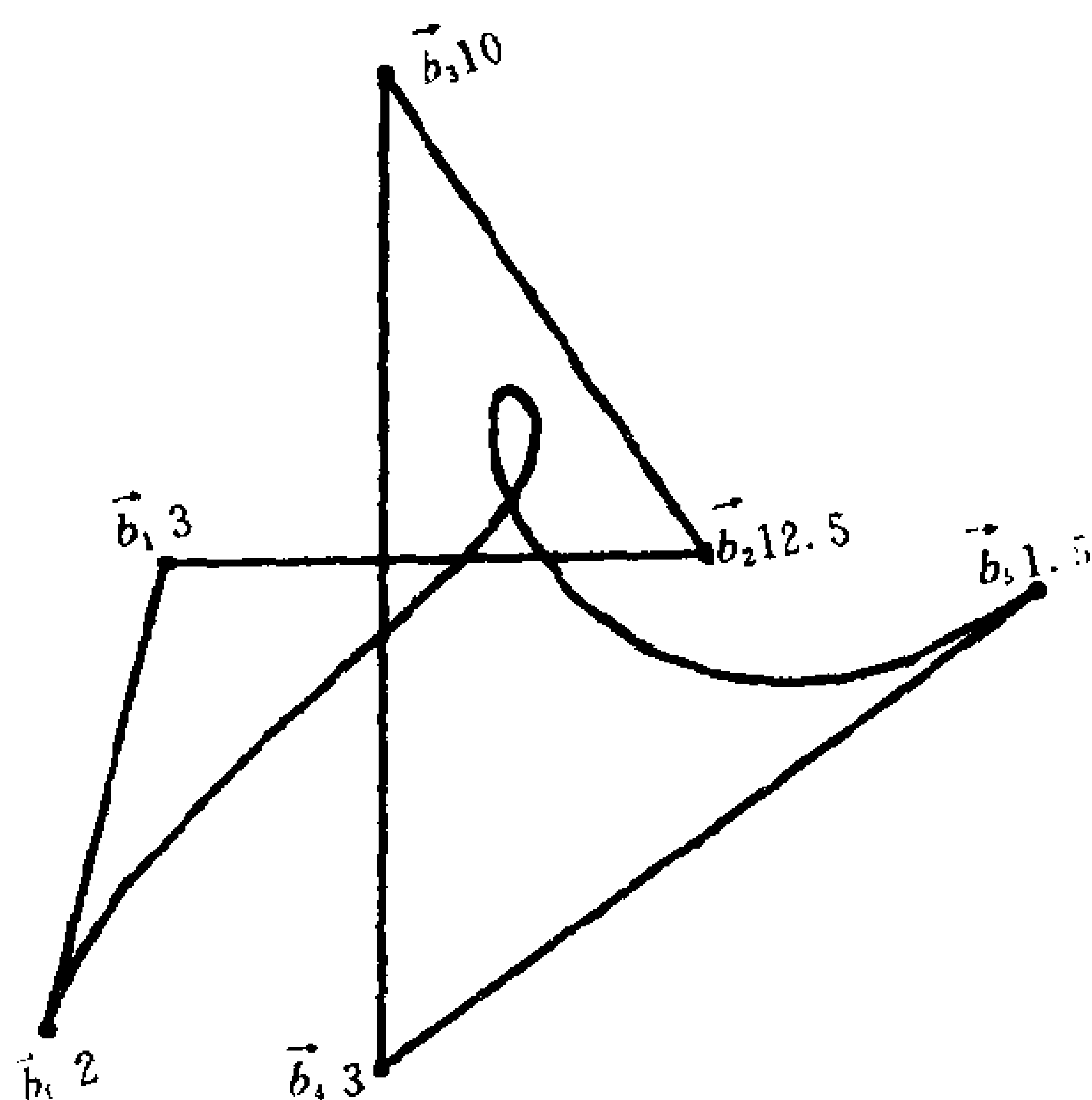


图 4.12　有理 Bezier 曲线

仍考虑单位圆，即在一个给定的平面直角座标系中，中心在原点、半径等于 1 的圆. 研究单位圆上的一段弧. 为方便起见，也不失一般性，设这一段圆弧关于纵轴是对称的. 指定曲线的方向是反时针的，令圆弧的起点有座标 $(\cos\theta, \sin\theta)$，$-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$，见图 4.13.

由于对称性，我们可以设权系数满足关系 $\omega_0 = \omega_3$，$\omega_1 = \omega_2$. 必要时在 (10) 的右边的分子、分母上除以 $\omega_0 = \omega_3$，因此可设 4 个权系数依次为 1，ω，ω，1，其中 $\omega := \omega_1/\omega_0$.

根据 § 2 中指出的有理 Bézier 曲线的端点性质可知

$$\boldsymbol{b}_0 = (\cos\theta,\ \sin\theta),$$

$$\boldsymbol{b}_1 = (\cos\theta - \lambda\sin\theta,\ \sin\theta + \lambda\cos\theta),$$

$$\boldsymbol{b}_2 = (-\cos\theta + \lambda\sin\theta,\ \sin\theta + \lambda\cos\theta),$$

$$\boldsymbol{b}_3 = (-\cos\theta,\ \sin\theta),$$

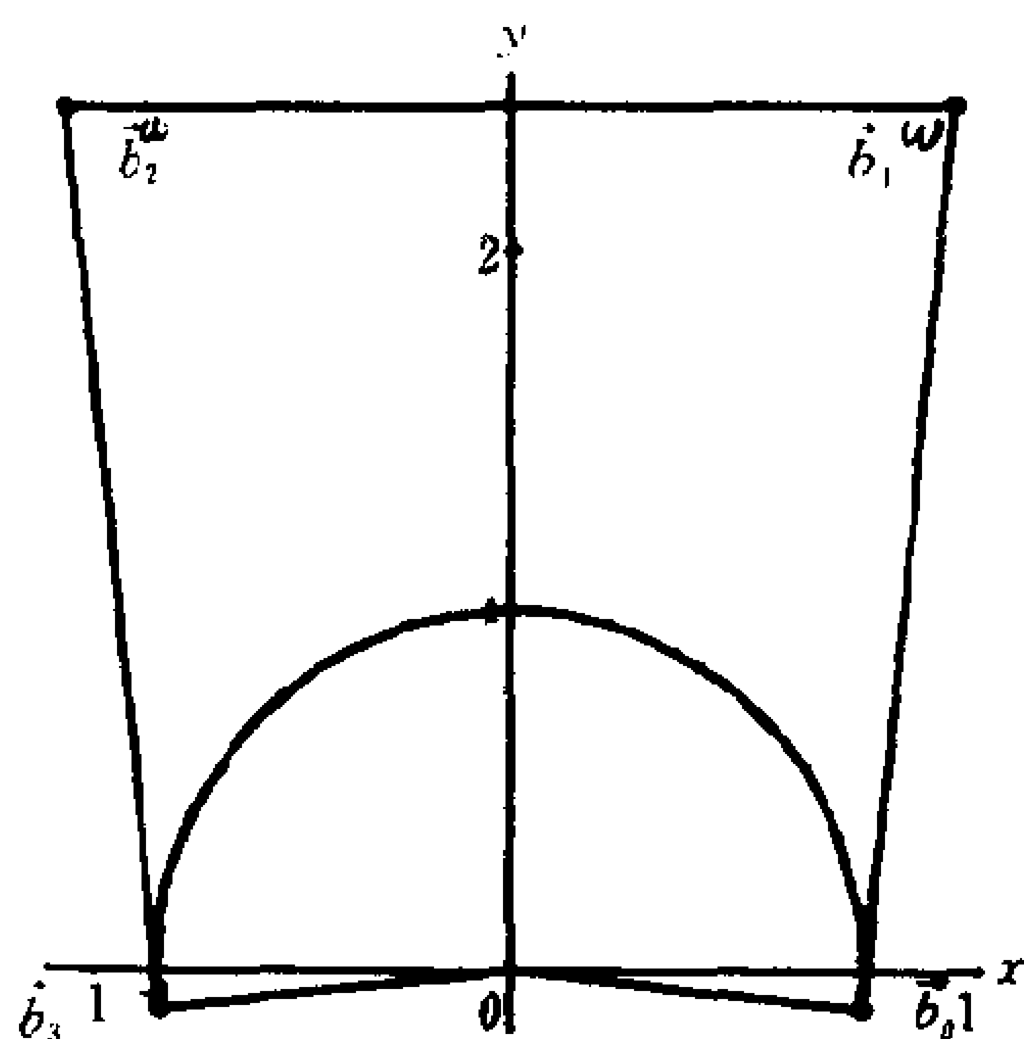


图 4.13 用有理 Bézier 曲线表示圆弧

其中 $\lambda>0$，它的几何意义是控制多边形的第一条边与第三条边的长度.

下面即将看到，λ 与 ω 的数值完全由 θ 经过简单的公式决定.

设 $\boldsymbol{R}(t)=(x(t),y(t))$，并令

$$\xi(t):=x(t)\omega(t),\qquad \eta(t):=y(t)\omega(t),$$

其中

$$\omega(t)=B_0^3(t)+\omega B_1^3(t)+\omega B_2^3(t)+B_3^3(t).\tag{16}$$

我们指出 $\omega(t)$ 实际上是一个二次多项式，这是因为 $\omega(t)$ 可以改写为

$$\begin{aligned}\omega(t)&=\sum_{i=0}^{3}B_i^3(t)+(\omega-1)(B_1^3(t)+B_2^3(t))\\&=1+3(\omega-1)t(1-t).\end{aligned}$$

根据同样的理由，

$$\begin{aligned}\eta(t)=&\sin\theta B_0^3(t)+\omega(\sin\theta+\lambda\cos\theta)(B_1^3(t)+B_2^3(t))\\&+\sin\theta B_3^3(t)\end{aligned}$$

也是一个二次多项式.

为了让 $\boldsymbol{R}(t)$ 表示单位圆的一部份，必须而且只须 $x^2(t)+y^2(t)=1$，即

$$\xi^2(t)+\eta^2(t)=\omega^2(t). \tag{17}$$

前已指出 $\eta(t)$ 与 $\omega(t)$ 都是二次多项式，由(17)知

$$\xi(t)=\cos\theta B_0^3(t)+\omega(\cos\theta-\lambda\sin\theta)B_1^3(t)$$
$$+\omega(-\cos\theta+\lambda\sin\theta)B_2^3(t)-\cos\theta B_3^3(t)$$

必须也是一个二次多项式，这必须而且只须

$$\cos\theta-3\omega(\cos\theta-\lambda\sin\theta)+3\omega(-\cos\theta+\lambda\sin\theta)+\cos\theta=0,$$

即

$$3\omega(\cos\theta-\lambda\sin\theta)=\cos\theta. \tag{18}$$

现在，为了确认(17)是一个恒等式，只需确认它的双方在 $t=0$ 与 $t=1$ 的数值相等，双方的一阶导数值在 $t=0$ 与 $t=1$ 时相等，以及双方的二阶导数在 $t=0$ 时的值相等.

i) 利用多项式的 Bernstein 形式的端点性质知

$$\left.\begin{aligned}&\xi(0)=\cos\theta, \quad \eta(0)=\sin\theta, \quad \omega(0)=1,\\&\xi(1)=-\cos\theta, \quad \eta(1)=\sin\theta, \quad \omega(1)=1,\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

由此立即可见

$$\xi^2(0)+\eta^2(0)=\omega^2(0),$$
$$\xi^2(1)+\eta^2(1)=\omega^2(1).$$

ii) 在 (17) 双方对 t 求导，得出

$$\xi(t)\xi'(t)+\eta(t)\eta'(t)=\omega(t)\omega'(t). \tag{20}$$

由于

$$\left.\begin{aligned}&\xi'(0)=3((\omega-1)\cos\theta-\lambda\omega\sin\theta),\\&\eta'(0)=3((\omega-1)\sin\theta+\lambda\omega\cos\theta),\\&\omega'(0)=3(\omega-1)\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

以及 (19)，可知当 $t=0$ 时 (20) 的左、右两方相等. 同理可证，

当 $t=1$ 时(20)的左、右两方也相等.

iii) 进一步在 (20) 的双方对 t 求导，得到

$$\begin{aligned}\xi'^2(t)+\eta'^2(t)+\xi(t)\xi''(t)+\eta(t)\eta''(t)\\=\omega'^2(t)+\omega(t)\omega''(t).\end{aligned}\tag{22}$$

直接计算可知

$$\left.\begin{aligned}\xi''(0)&=6((1-3\omega)\cos\theta+3\lambda\omega\sin\theta),\\\eta''(0)&=6(-\lambda\omega\cos\theta+(1-\omega)\sin\theta),\\\omega''(0)&=6(1-\omega).\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

将(19)中的第一排公式和(21)、(23)代入(22)式，经过直截了当的计算，便得出

$$3\lambda^2\omega+4\cos\theta(\lambda\sin\theta-\cos\theta)=0.\tag{24}$$

综合起来说，只要(18)与(24)同时成立，那么有理 Bézier 曲线就精确地表示了所讨论的圆弧.

联合(18)与(24)，得出 $9\lambda^2\omega^2=4\cos^2\theta$. 开方得出(因为 $\cos\theta\geqslant0$)

$$3\lambda\omega=2\cos\theta.\tag{25}$$

将(25)代回到(24)，得

$$\lambda=\frac{2\cos\theta}{1+2\sin\theta}.\tag{26}$$

从(25)中消去 λ，便有

$$\omega=\frac{1+2\sin\theta}{3}.\tag{27}$$

公式 (26) 与 (27) 正是我们所需要的.

例如，为了精确地表示一个半圆周，取 $\theta=0$，这时 $\lambda=2$，$\omega=\frac{1}{3}$. 控制多边形的顶点是

$$(1,0),(1,2),(-1,2),(-1,0),$$

见图 4.14.

为了使权系数 ω 不出现负值，必须有 $1+2\sin\theta>0$，即 θ 的

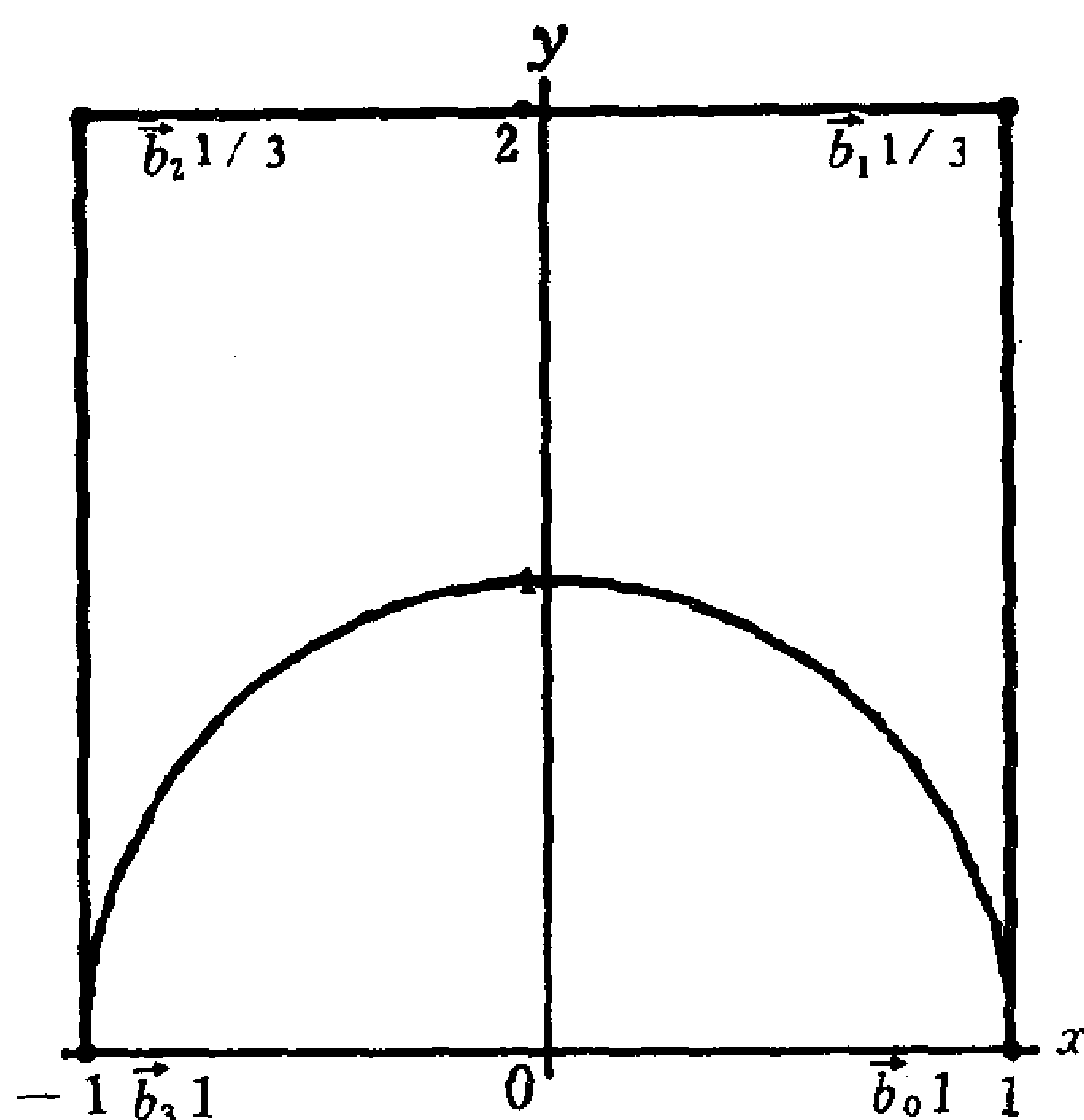


图 4.14 三次有理 Bézier 曲线表示半圆周

范围应当限制在 $(-\pi/6, \pi/2)$，这就是说所表示的圆弧不可超过整个圆周的 2/3.

§4 结束语

在第一节中，我们讨论了用 3 次 Bézier 曲线来逼近一段圆弧. 在那里，我们已经看到平面三次 Bézier 曲线段上可能出现拐点、尖点与二重点. 指定端点的位置、指定在这两点上的切线方向，但让在这两点上切向量的长度 λ 与 μ 自由变化，将产生形形色色的平面三次 Bézier 曲线. 曲线上何时出现拐点、何时出现尖点或二重点？汪嘉业（见 [Wang'81]、苏步青和刘鼎元（见 [Su & Liu'89]）作出了彻底的分析，他们在 (λ, μ) 平面上找出了许多区域，指明了在怎样的区域中对应着正常曲线（即既无拐点又无奇点）、怎样的区域对应着拐点或奇点. 这些

工作称为“平面三次参数曲线的形状分类”，是中国数学家对于CAGD的重要贡献之一．关于这些结果，可参看苏步青、刘鼎元教授合著的《计算几何》(上海科学技术出版社，1981年).

Bézier多项式参数曲线不能精确地表示圆周，为克服这一缺陷，我们引入了有理Bézier曲线，它是多项式Bézier曲线的推广．有理三次Bézier曲线的一大优点是：它把三次多项式参数曲线和圆锥曲线这二者都作为特例包括进来．当所有的权系数相等时，我们重新获得参数Bézier曲线；当控制点适合$\boldsymbol{b}_0-3\boldsymbol{b}_1+3\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{0}$时，它变成有理二次曲线，即圆锥曲线．这一点有很大的实用价值，在计算机辅助几何设计诞生前很久，工程师们非常喜欢使用圆锥曲线来作外形设计．时至今日，当CAGD变得充分成熟的时候，他们也不愿意放弃他们使用得得心应手的数学工具．因此，在一个应用的几何造型程序系统中，如果包容着有理Bézier曲线，那么一方面拥有参数曲线的现代工作，同时也充分照顾到了工程技术人员的习惯.

在§3中，我们用三次有理Bézier曲线来表达圆周，其中也建议了怎样利用有理三次Bézier曲线来作曲线设计.

本书对曲线的讨论到此止步，我们将在下一章转入对曲面的研究.

第五章 Bézier 三角曲面片

从本章开始，我们研究曲面.

在 CAGD 中，曲面有根本的重要性，这从 CAGD 的定义中就可以看得出来（见第一章).

从数学上来看，从曲线转到曲面，从一维转向二维，理论上要复杂许多，更加具有挑战性. 有些对曲线成立的结论，对曲面也能适用；对后者的证明也许是对前者的证明的平凡的推广. 也有些对曲线适用的结论，对曲面不再成立. 探讨如何将这些结论加以改造使之对曲面也能成立，往往是困难但却有趣的事. 这就不是平凡的推广，而是需要更多的创造和智慧. 唯其如此，数学才有进步和发展.

把 Bézier 曲线推广成曲面，有两种途径，第一是把曲面的定义域选成正方形、立方体……，第二种是把曲面局限在三角形、四面体……之上. 我们也会涉及第一种推广，但是重点是讨论三角形上的曲面片，其所以作出这种选择，主要是三角曲面片的数学非常之美，同时它的应用价值也不在矩形域上的曲面片之下.

本章介绍三角域上 Bézier 曲面的基本性质，它们都是第二章、第三章的某些内容的直接推广.

§1 面积座标

座标系在数学中的地位好比是“战场”. 在战斗中选择一个对我方有利的战场是非常重要的. 对于研究三角曲面来说，通常大家比较熟悉的平面直角座标系就不很合适. 最方便的乃是面积座标系.

平面上任意给定一个三角形，按照反时针绕行的方向它的三个顶点以 T_1，T_2，T_3 来记，这个三角形的内部连同边界用德文字母 $\mathscr{T}$ 来记. 任取一点 $P\in\mathscr{T}$，把 P 与 T_1，T_2，T_3 用直线相连（图 5.1）.

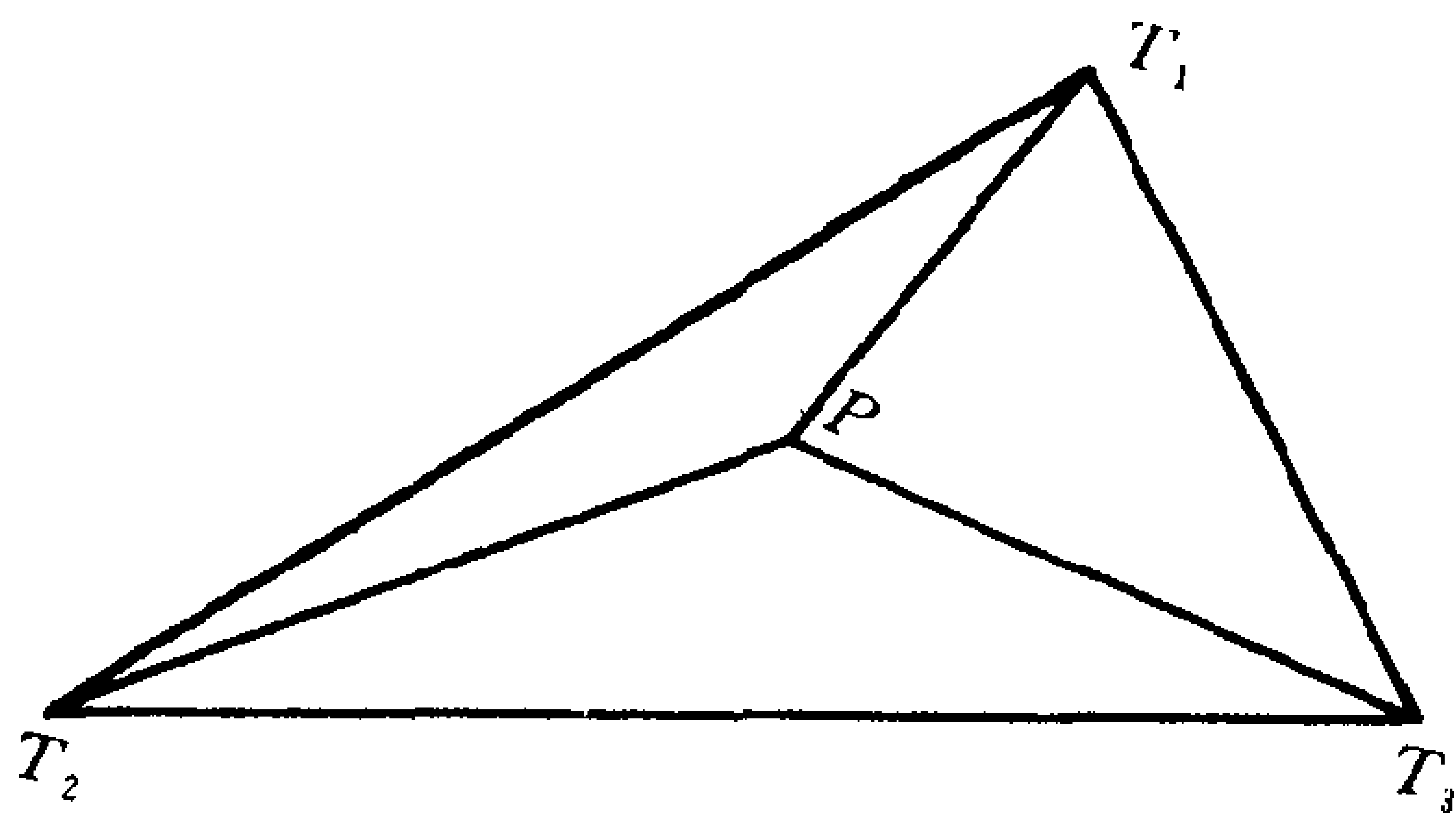


图 5.1 面积座标

定义

$$\left.\begin{aligned}u_1:&=\frac{[PT_2T_3]}{[T_1T_2T_3]},\\u_2:&=\frac{[T_1PT_3]}{[T_1T_2T_3]},\\u_3:&=\frac{[T_1T_2P]}{[T_1T_2T_3]},\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

式中 $[PT_2T_3]$ 的意义是三角形 PT_2T_3 有**有向面积**，说仔细一些就是当 P，T_2，T_3 是反时针方向绕行时，$[PT_2T_3]$ 表示的是以这三点为顶点的三角形的面积；当 P，T_2，T_3 是顺时针方向绕行时，$[PT_2T_3]$ 就是这个三角形的面积并冠以负号，如此等等.

称 (u_1,u_2,u_3) 为点 P 的**面积座标**，写成 $P=(u_1,u_2,u_3)$，也就是说，对点和该点的面积座标不加以区别. 从定义立知

$$\left.\begin{aligned}&u_1\geqslant 0,u_2\geqslant 0,u_3\geqslant 0,\\&u_1+u_2+u_3=1,\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

最后一个等式的几何意义是：由点 P 分成的三个小三角形的面积之和正好是三角形 $\mathscr{T}$ 的面积. 由此式可知，三个面积座标不是独立的. 独立的只有两个，知道了 (u_1,u_2,u_3) 中的任何两个就可以算出另外一个.

由定义立刻看出，当点 P 在线段 T_2T_3 上，有 $u_1=0$，当 P 在 T_3T_1 上 $u_2=0$，当 P 在 T_1T_2 上 $u_3=0$. 特别地

$$T_1=(1,0,0),T_2=(0,1,0),T_3=(0,0,1).$$

其实，只要给定 $\mathscr{T}$——**座标三角形**——之后，对于平面上的任何一点 P 都可以按照 (1) 来定义其面积座标，并不非要把 P 限制在 $\mathscr{T}$ 上. 当 P 在 $\mathscr{T}$ 之外时，(2) 中前三个不等式不会同时成立，但是 (2) 中最后一个等式仍然是真确的. 如图 5.2，设 $T_1T_2PT_3$ 是一个平行四边形，那么 P 有面积座标 $P=(-1,1,1)$.

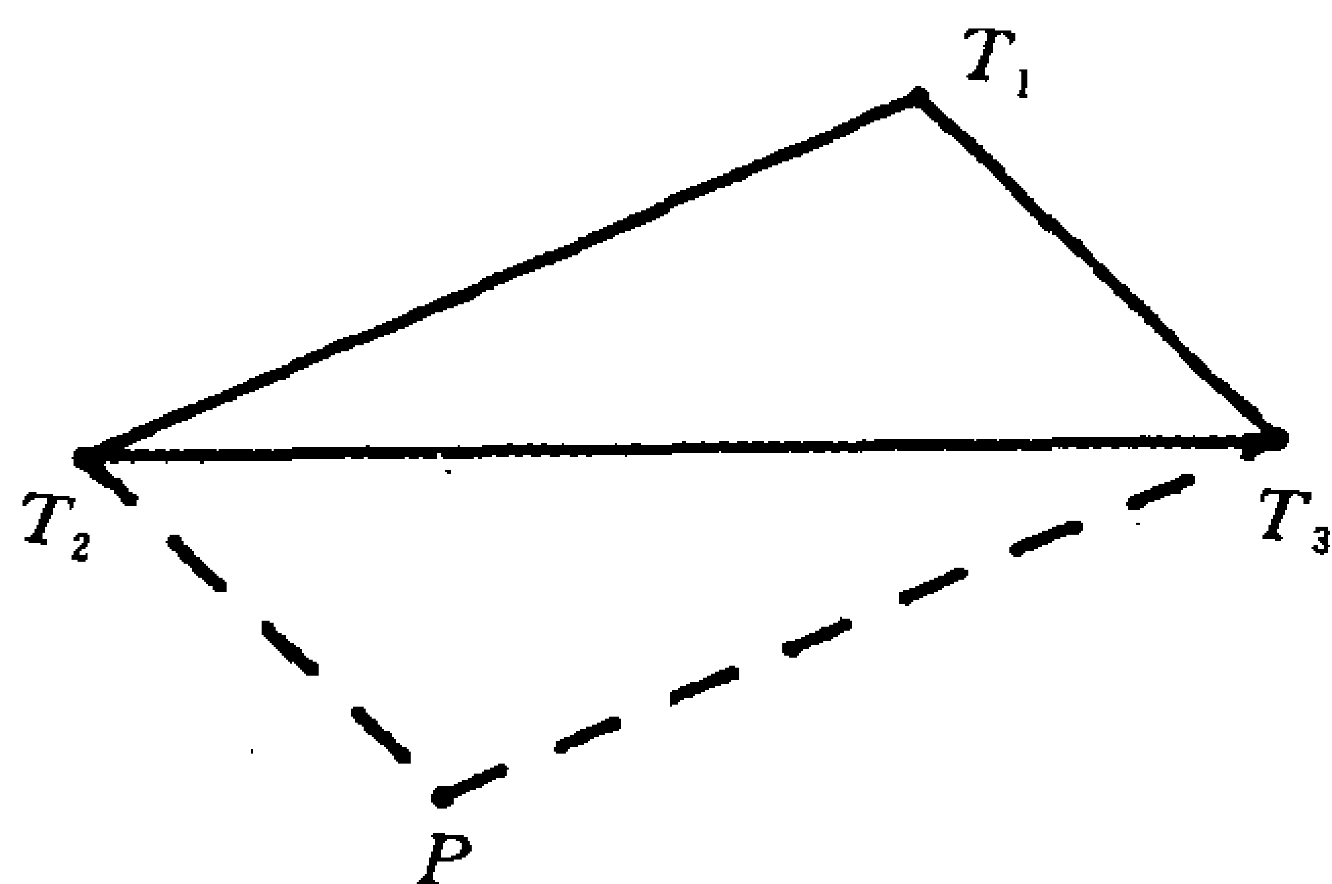


图 5.2　点 P 可以在座标三角形之外

点 P 的三个面积座标的符号，按 P 所在的区域，分为图 5.3 所示的 7 种情况.

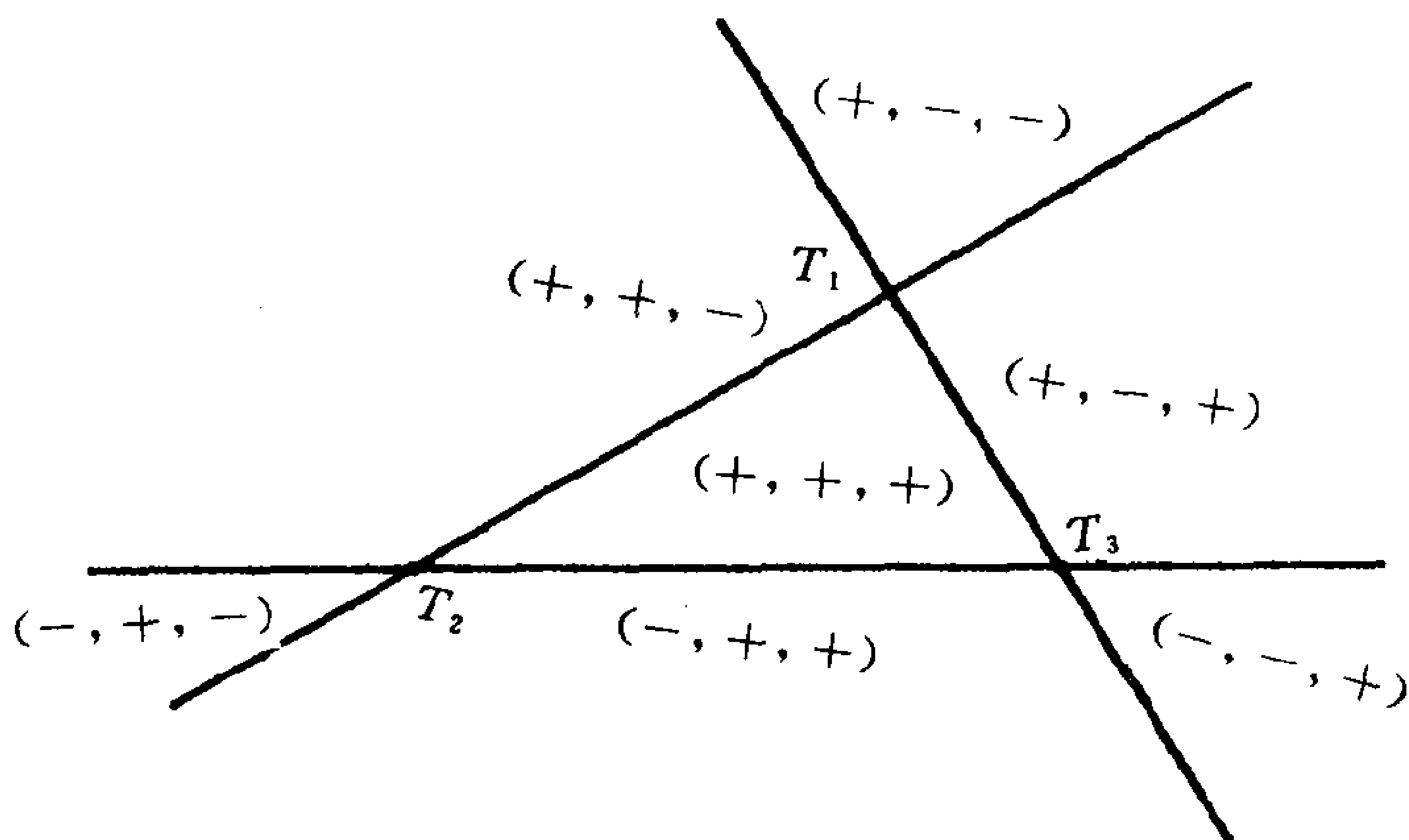


图 5.3　座标的符号分布

人们通常习惯于使用直角座标，因此需要建立角直座标与面积座标之间的联系. 设想在平面上还有一个直角座标系，在这个座标系中 $T_i=(x_i, y_i)$，$i=1, 2, 3$，点 $P=(x, y)$. 由

解析几何中证明的面积公式，可知

$$u_1=\frac{\begin{vmatrix}1&x&y\\1&x_2&y_2\\1&x_3&y_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&x_1&y_1\\1&x_2&y_2\\1&x_3&y_3\end{vmatrix}},\ u_2=\frac{\begin{vmatrix}1&x_1&y_1\\1&x&y\\1&x_3&y_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&x_1&y_1\\1&x_2&y_2\\1&x_3&y_3\end{vmatrix}},\ u_3=\frac{\begin{vmatrix}1&x_1&y_1\\1&x_2&y_2\\1&x&y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&x_1&y_1\\1&x_2&y_2\\1&x_3&y_3\end{vmatrix}}. \tag{3}$$

这就是在已知 P 的直角坐标 (x, y) 的情况下计算 P 的面积坐标 (u_1, u_2, u_3) 的公式. 反过来，已知 $P=(u_1, u_2, u_3)$，则计算 P 的直角坐标的公式是

$$\left.\begin{aligned}x=\sum_{i=1}^{3}u_ix_i,\\ y=\sum_{i=1}^{3}u_iy_i.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

为了证明 (4)，我们把坐标三角形 $\mathscr{T}$ 放在三维空间中来讨论，设与 xy 一平面垂直的单位向量是 $\boldsymbol{k}$. 由于 P 在 $\mathscr{T}$ 的内部，因此 P 可以表为顶点 T_1，T_2，T_3 的凸线性组合，即

$$P=\sum_{i=1}^{3}\lambda_iT_i. \tag{5}$$

其中非负实数 λ_1，λ_2，λ_3 适合 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$. 将 (5) 写成向量形式就是

$$\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\boldsymbol{PT}_i=\boldsymbol{0}. \tag{6}$$

将 $\boldsymbol{PT}_1$ 与 (6) 双方作矢量积，便有

$$\lambda_2\boldsymbol{PT}_2\times\boldsymbol{PT}_1+\lambda_3\boldsymbol{PT}_3\times\boldsymbol{PT}_1=\boldsymbol{0}. \tag{7}$$

由于

$$\boldsymbol{PT}_2\times\boldsymbol{PT}_1=-2\,[T_1T_2P]\,\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{PT}_3\times\boldsymbol{PT}_1=-2\,[T_1PT_3]\,\boldsymbol{k},$$

由（7）得出

$$-\lambda_2 u_3+\lambda_3 u_2=0,$$

即 $u_2:u_3=\lambda_2:\lambda_3$. 由对称性得知

$$u_1:u_2:u_3=\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3.$$

再由 $\Sigma\lambda_i=\Sigma u_i=1$ 知 $\lambda_i=u_i$，$i=1$，2，3. 从而（5）变为

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{3}u_i(x_i,y_i),$$

这样就证明了(4).

第二种座标变换乃是由座标三角形的改变而引起的. 设想除了三角形 $T_1T_2T_3$ 之外，还有另一个三角形 $Q_1Q_2Q_3$，把它们都当作座标三角形，因此平面上任一点 P 就会有两套面积座标，分别记为(u_1, u_2, u_3)及(v_1, v_2, v_3). 问题是：这两套面积座标有什么关系？

设 Q_i 关于旧座标三角形 $\mathscr{T}$ 的面积座标是

$$Q_i=(u_1^i,u_2^i,u_3^i),\qquad i=1,2,3$$

于是

$$P=\sum_{i=1}^{3}v_iQ_i=\sum_{i=1}^{3}v_i\sum_{j=1}^{3}u_j^iT_j$$

$$=\sum_{j=1}^{3}\Big(\sum_{i=1}^{3}u_j^iv_i\Big)T_j,$$

我们有

$$u_j=\sum_{i=1}^{3}u_j^iv_i,\qquad j=1,2,3. \tag{8}$$

公式(8)可以表为矩阵形式

$$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1^1&u_1^2&u_1^3\\u_2^1&u_2^2&u_2^3\\u_3^1&u_3^2&u_3^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}. \tag{9}$$

这个公式以后常会用到.

§2 B-网

平行于第二章中单变量的多项式的 Bernstein 表示，现在讨论两个独立变量的多项式的 Bernstein 表示. 在第二章，二项式定理起着根本的作用，这儿需要的是“三项式定理”. 设 a，b，c 是三个数量，$n\in\mathcal{N}$，我们有

$$(a+b+c)^n=\sum_{i+j+k=n}\frac{n!}{i!j!k!}a^ib^jc^k, \tag{10}$$

这就是三项式定理. 要证明（10），可以采用数学归纳法. （10）的右边的求和的意义是：对一切适合 $i+j+k=n$ 的非负整数 i，j，k 来作和，因此，（10）的右方共有 $(n+1)(n+2)/2$ 个加项.

设 (u_1, u_2, u_3) 是点 P 关于某座标三角形 $\mathscr{T}$ 的面积座标，定义

$$B^n_{i,j,k}(P):=\frac{n!}{i!\ j!\ k!}u_1^iu_2^ju_3^k,$$

$i+j+k=n$，称它们为 **Bernstein 基函数**，这是因为任何一个次数不超过 n 的、(u_1, u_2, u_3) 的多项式都可唯一地表示成它们的线性组合. 这一基函数有如下的性质：

1）$B^n_{i,j,k}(P)\geqslant 0$ 对于 $P\in\mathscr{T}$ 及 $i+j+k=n$ 成立；

2）$\sum\limits_{i+j+k=n}B^n_{i,j,k}(P)=1$.

第一式是明显的；由 $u_1+u_2+u_3=1$ 及（10）便可推出第二式.

任意给定一组数 $b_{i,j,k}$，$i+j+k=n$，称

$$B^n(P)=\sum_{i+j+k=n}b_{i,j,k}B^n_{i,j,k}(P) \tag{11}$$

为座标三角形 $\mathscr{T}$ 上的 n 次 Bézier 曲面片，也可以称为 Bézier

三角曲面．有时也将 $B^n(P)$ 写成 $B^n(u_1, u_2, u_3)$．$\{b_{i,j,k}\}$ 叫做该曲面的 **Bernstein 系数**.

第二章中的控制多边形在这里的对应物是**控制网**，常用的简称是 ***B*-网**．下面来阐明什么是 B-网．

设 $\mathscr{T}$ 是一个三角形，$n\in\mathscr{N}$．用平行于这三角形的一边的直线将 $\mathscr{T}$ 的其余两边分为 n 等份．三组这样的平行直线将 $\mathscr{T}$ 分成 n^2 个全等的小三角形，它们组成 $\mathscr{T}$ 的 ***n* 次剖分**，记为 $S_n(\mathscr{T})$．这些小三角形称为 $S_n(\mathscr{T})$ 的**子三角形**，任何子三角形的顶点叫做剖分 $S_n(\mathscr{T})$ 的**结点**，结点的数目为 $(n+1)(n+2)/2$．图 5.4 表示的是四次剖分 $S_4(\mathscr{T})$．

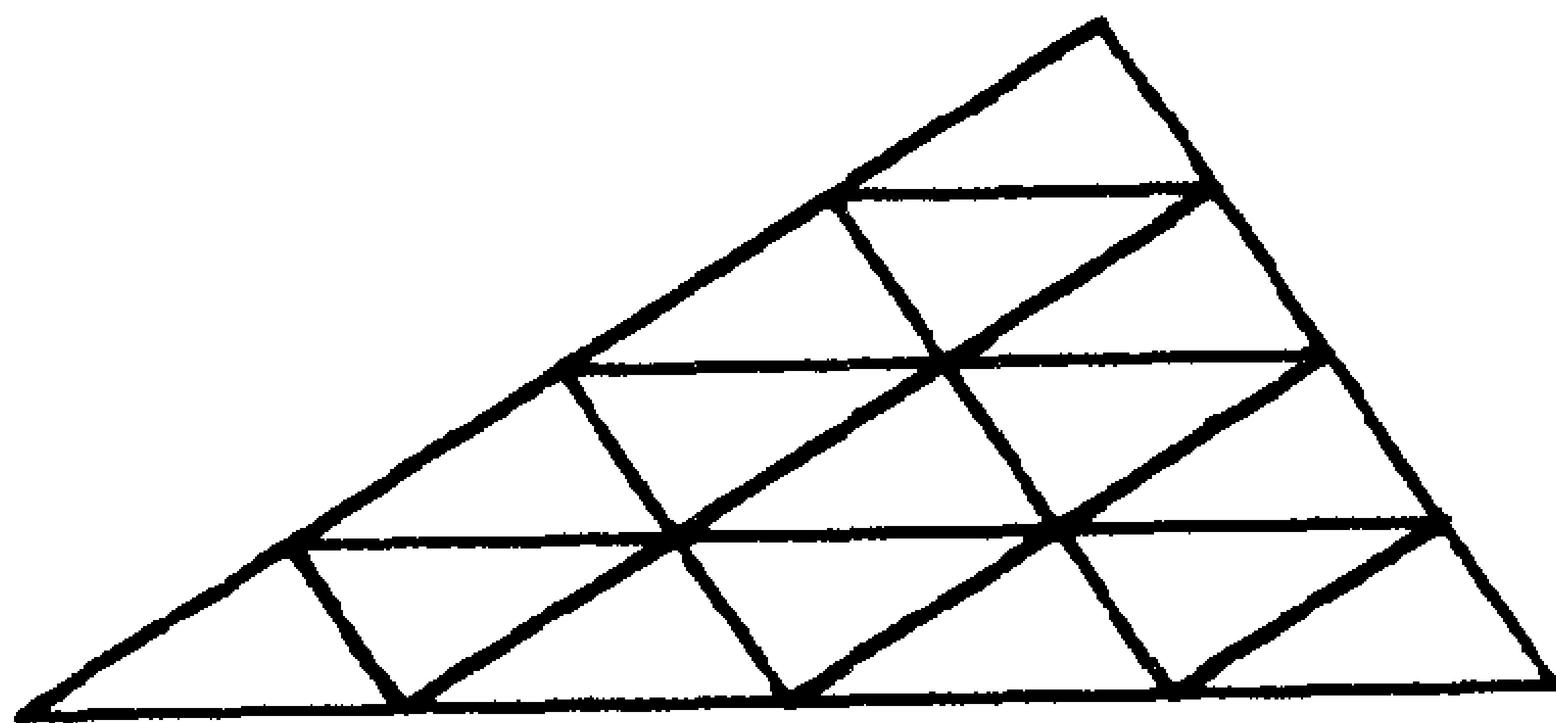


图 5.4　剖分 S_4（$\mathscr{T}$）

很明显，结点可以通过面积座标表示为

$$\left(\frac{i}{n},\ \frac{j}{n},\ \frac{k}{n}\right),\quad i+j+k=n,$$

记为点 $P_{i,j,k}$．

我们把 Bernstein 系数 $b_{i,j,k}$ 与点 $P_{i,j,k}$ 结合起来，得到三维空间中的一点

$$\boldsymbol{P}_{i,j,k}=(P_{i,j,k};b_{i,j,k}),\qquad i+j+k=n,$$

称它为三角曲面（11）的**控制点**．我们称在 $S_n(\mathscr{T})$ 的每一个子三角形上为线性并且在结点 $P_{i,j,k}$ 上取值为 $b_{i,j,k}$ 的分片线性的

连续函数为三角曲面（11）的**控制网**或***B*-网**. 图 5.5 画出了一个 *B*-网与其所确定的三角曲面及它们的定义域. 从图来看，三角曲面继承了它的 *B*-网的神态，下面我们来比较精确地解释这一句话.

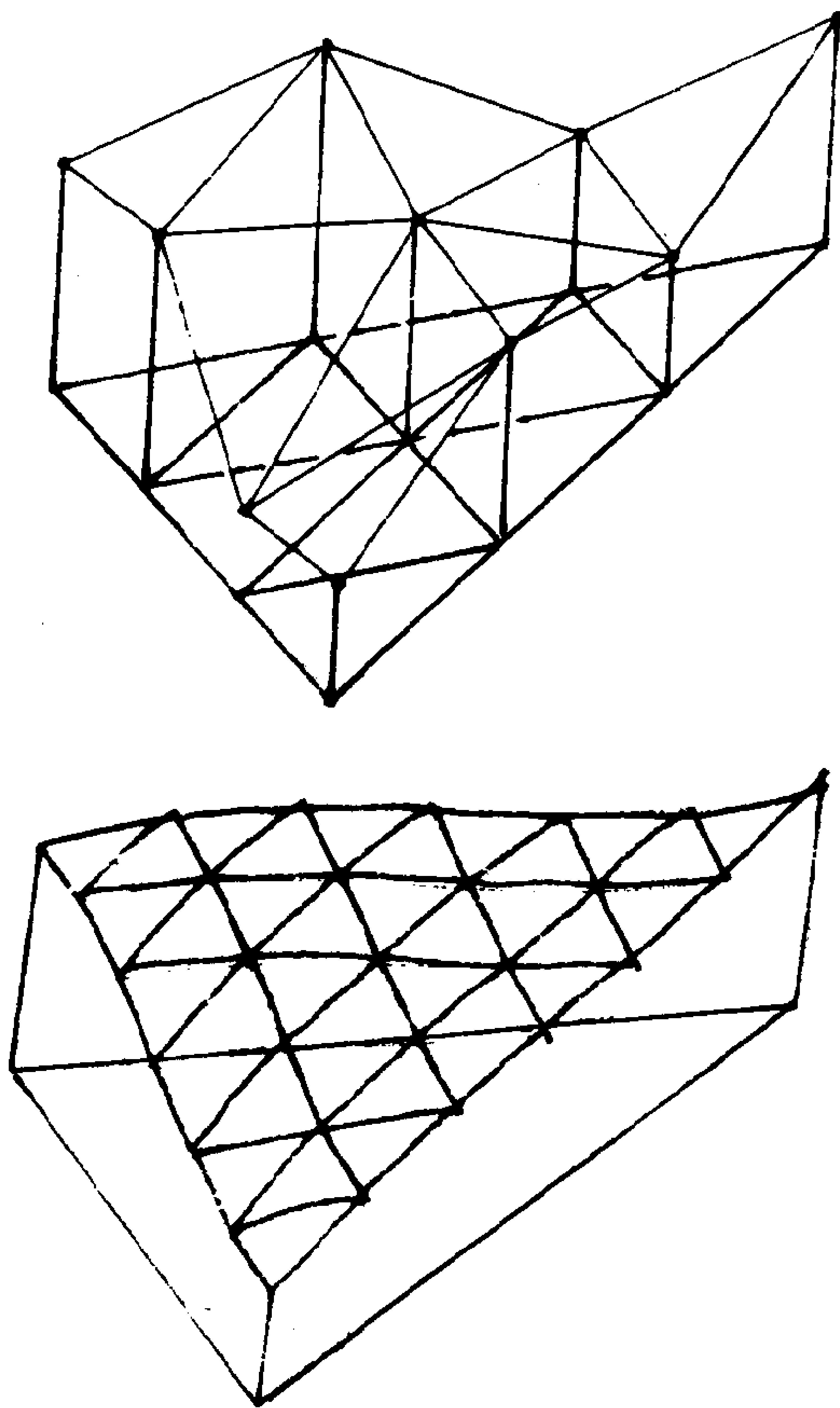


图 5.5　B-网与它所对应的三角曲面

为了数学推导的简洁，我们引入三个**移位算子** E_1, E_2, E_3，它们的定义是

$$E_1 b_{i,j,k} = b_{i+1,j,k},$$

$$E_2 b_{i,j,k} = b_{i,j+1,k},$$

$$E_3 b_{i,j,k} = b_{i,j,k+1},$$

其中 $i+j+k=n-1$. 注意：这三个算子是可以交换的. 利用三项式展开，很容易证明三角曲面(11)可以简洁地表为

$$B^n(P) = (u_1E_1 + u_2E_2 + u_3E_3)^n b_{0,0,0}. \tag{12}$$

由此立知

$$\left.\begin{aligned} B^n(T_1) &= E_1^n b_{0,0,0} = b_{n,0,0}, \\ B^n(T_2) &= b_{0,n,0}, \\ B^n(T_3) &= b_{0,0,n}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

这表明：在定义域 $\mathscr{T}$ 的三个顶点上，三角曲面与其 B-网的对应点相同，这个性质称为**插值性**. 这三个重合的点称为三角曲面及其 B-网的**角点**.

如果取 $u_1=0$ 那么 $u_3=1-u_2$，由 (12) 得

$$B^n(0, u_2, 1-u_2) = \sum_{i=0}^{n} b_{0,i,n-i} B_i^n(u_2),$$

$0 \leqslant u_2 \leqslant 1$. 这表明：三角曲面的三条边界是以曲面的 B-网的边界为控制多边形的 Bézier 曲线. 再利用 Bézier 曲线的端点切线的性质立即推知：B-网上包含其角点的那个小三角形张成了三角曲面在同一角点上的切平面，见图 5.6.

同样明显的是：Bézier 三角曲面也具有凸包性质，即曲面完全被包含在控制点所构成的凸包之中. 作为特例，由 B-网的正性可以断言由它所决定的三角曲面也是正的.

最后，来看两个特例

例 1 当 $n=1$ 时，只有三个 Bernstein 系数，这时三角曲面

的方程是

$$B^1(P) = u_1 b_{1,0,0} + u_2 b_{0,1,0} + u_3 b_{0,0,1},$$

它是由三个角点决定的平面，这时曲面与其 B-网是重合的.

例 2 当 $n=2$ 时，有 6 个控制点. 这时所对应的 Bézier 三角曲面片可以表示为矩阵形式

$$B^2(P) = (u_1 u_2 u_3) \begin{pmatrix} b_{200} & b_{110} & b_{101} \\ b_{110} & b_{020} & b_{011} \\ b_{101} & b_{011} & b_{002} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

当 $n=3$ 时，有 10 个控制点. 在图 5.6 中画出了控制网以及它所产生的三次曲面.

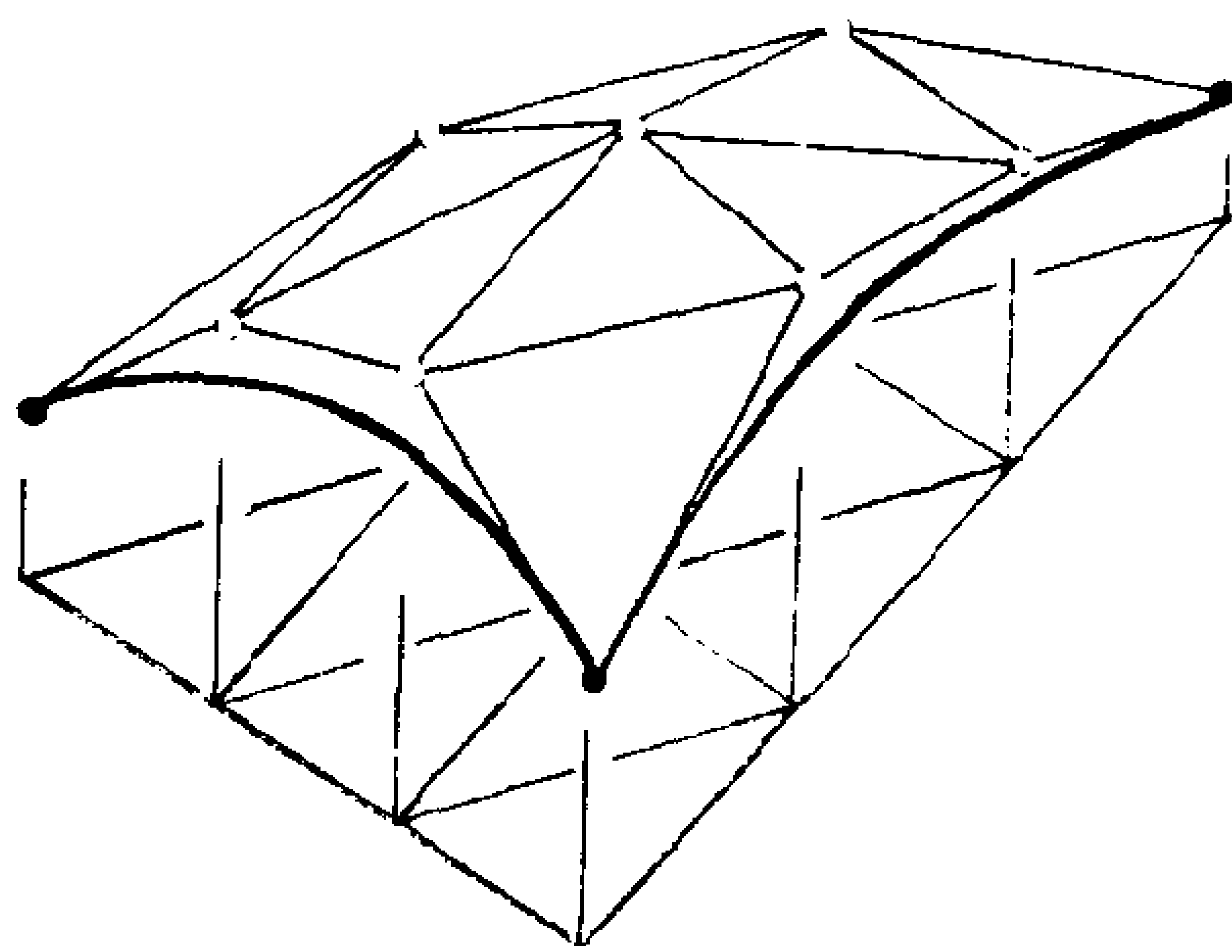


图 5.6 三次的三角曲面

§3 de Casteljau 算法

任意地给定 $P=(u_1, u_2, u_3) \in \mathscr{T}$，有一套十分简单的几何作图程式来计算三角曲面上的对应点.

设想曲面的控制点 $\boldsymbol{P}_{i,j,k}$ $(i+j+k=n)$ 已经给定. 令

$$\boldsymbol{P}_{i,j,k}^{(0)} := \boldsymbol{P}_{i,j,k} \quad (i+j+k=n), \qquad (15)$$

再定义

$$P_{i,j,k}^{(l)} := u_1 P_{i+1,j,k}^{(l-1)} + u_2 P_{i,j+1,k}^{(l-1)} + u_3 P_{i,j,k+1}^{(l-1)}, \qquad (16)$$

这里 $l=1, 2, \cdots, n$ 并且 $i+j+k=n-l$.

由（15）与（16）所定义的算法称为 **de Casteljau 算法**，简称**递推算法**. 我们有如下的

定理 5.1 1°. 由递推算法最后得到的那个点 $P_{0,0,0}^{(n)}$ 正是三角曲面（11）上对应于 $P=(u_1, u_2, u_3)$ 的点；

2°. 三点 $P_{1,0,0}^{(n-1)}, P_{0,1,0}^{(n-1)}, P_{0,0,1}^{(n-1)}$ 所张成的平面是曲面（11）在点 $P_{0,0,0}^{(n)}$ 上的切平面.

证明 公式（16）可以用移位算子写成

$$P_{i,j,k}^{(l)} = (u_1E_1 + u_2E_2 + u_3E_3)P_{i,j,k}^{(l-1)}, \qquad (17)$$

反复地使用公式（17），得

$$P_{i,j,k}^{(l)} = (u_1E_1 + u_2E_2 + u_3E_3)^l P_{i,j,k} \qquad (18)$$

这里 $i+j+k+l=n$. 在（18）中置 $l=n$，于是 $i=j=k=0$，得到

$$P_{0,0,0}^{(n)} = (u_1E_1+u_2E_2+u_3E_3)^n P_{0,0,0},$$

与（12）相比较，并注意到

$$(u_1E_1 + u_2E_2 + u_3E_3)^n P_{0,0,0} = \sum_{i+j+k=n} P_{i,j,k}B_{i,j,k}^n(P)$$

$$= \left(\sum_{i+j+k=n} \frac{i}{n} B_{i,j,k}^n(P), \sum_{i+j+k=n} \frac{j}{n} B_{i,j,k}^n(P), \sum_{i+j+k=n} \frac{k}{n} B_{i,j,k}^n(P) \right) = (u_1, u_2, u_3),$$

便知第一个结论是正确的.

图 5.7 是当 $n=3$ 时 de Casteljau 算法的几何表示. 正如在 Bézier 曲线的情形，算法是通过一系列的（二维）线性插值而实现的.

至于第二个论断，它可以作为下一节的“分割定理”的特

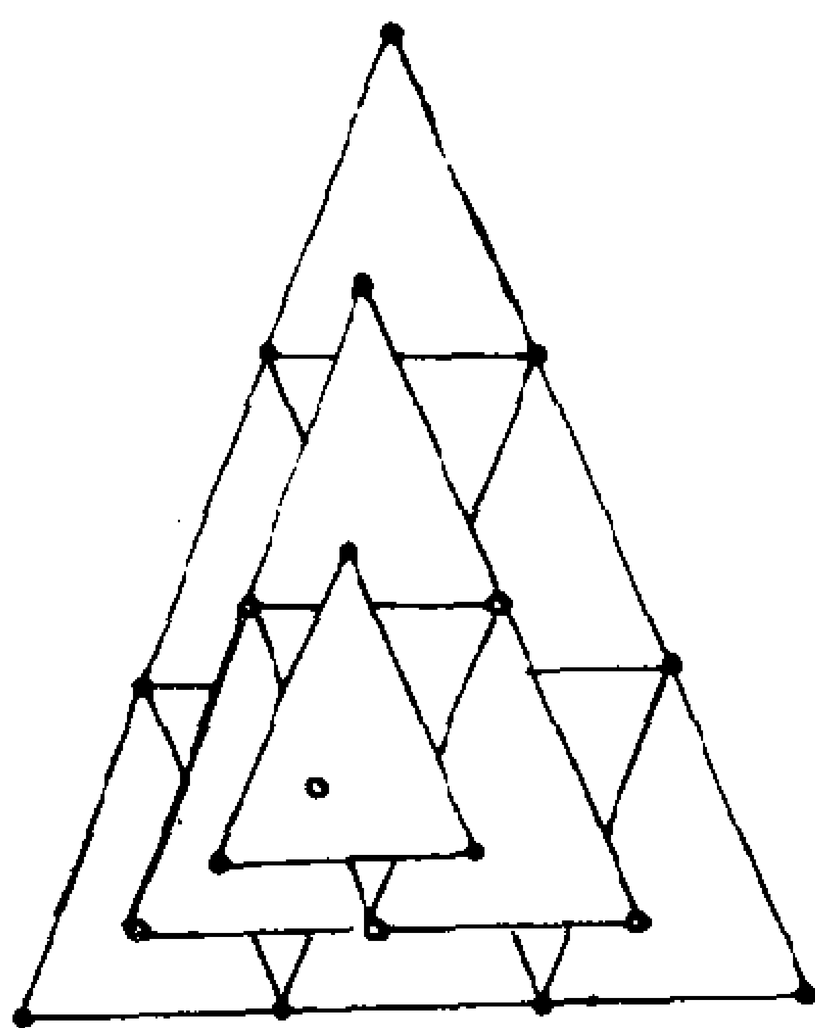
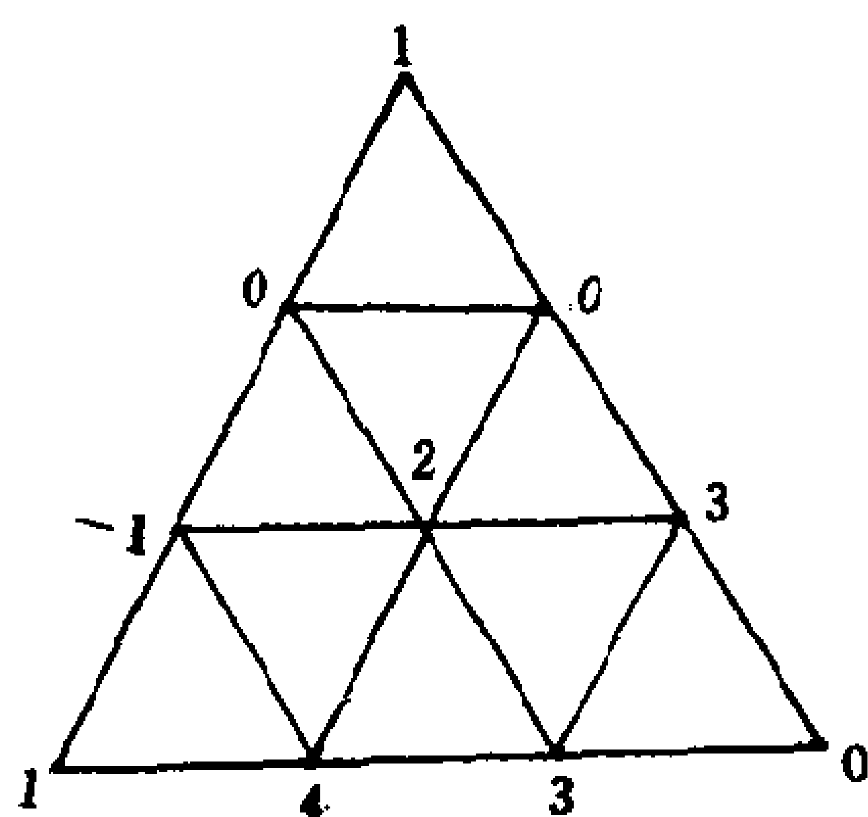


图 5.7 递推算法

例而导出，这里就不加以证明了.

最后，举一个数值例子，以便认识如何用递推算法从 Bernstein 系数来算出对应的 Bernstein 形式的值.

设某个三次 Bézier 三角曲面的 Bernstein 系数由下图给出



它的精确涵义是

$$b_{3,0,0}=1,$$

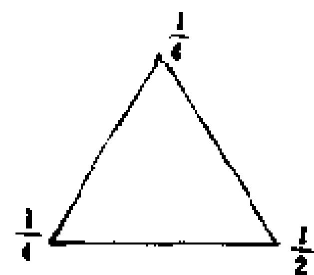
$$b_{2,1,0}=0,\quad b_{2,0,1}=0,$$

$$b_{1,2,0}=-1,\ b_{1,1,1}=2,\ b_{1,0,2}=3,$$

$$b_{0,3,0}=1,\ b_{0,2,1}=4,\ b_{0,1,2}=3,\ b_{0,0,3}=0.$$

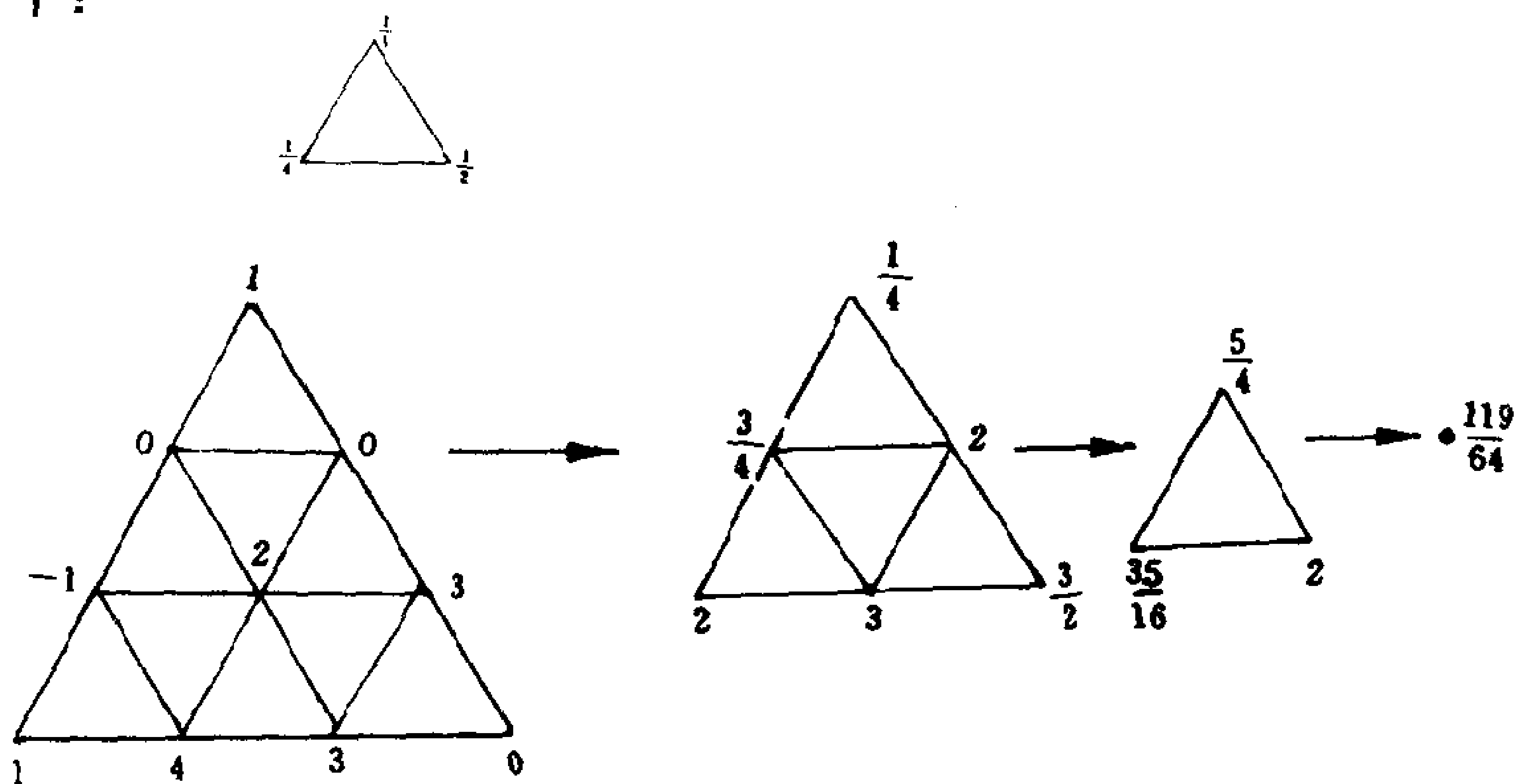
我们要计算当 $P=(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2})$ 时 $B^3(P)$ 所对应的数值，把

P 的面积座标写为



注意，这个等边三角形要画得同前面的剖分 $S_3(\mathscr{T})$ 中的子三角形有相同的大小. 递推算法可以按下列步骤实现：把最后那个三角形平行地移动，让它与 $S_3(\mathscr{T})$ 中那 6 个可与它重合的子三

角形重叠；每重叠一次，则计算重合的顶点上的两数的乘积，然后把它们相加而得到一个数值，这样来构成 $b_{i,j,k}^{(1)}$，这里 $i+j+k=2$. 用同样的方法继续进行下去……，整个过程可以表示如下：



这就是说 $B^3\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)=\frac{119}{64}$.

§4 分割定理

分割定理在理论与实践上都有着重要的意义，它是递推算法的推广. 本节的符号与前节保持一致.

定理 5.2 点 $P=(u_1, u_2, u_3)$ 把座标三角形 $\mathscr{T}$ 分成三个小三角形 PT_2T_3，T_1PT_3，T_1T_2P. $\mathscr{T}$ 上的 Bézier 三角曲面片 (11) 在每一个小三角形上的那一部份也是 Bézier 三角曲面片，它们的控制点正好是 de Casteljau 算法的副产品，即分别是

$$\{\boldsymbol{P}_{0,j,k}^{(i)}\},\{\boldsymbol{P}_{i,0,k}^{(j)}\},\{\boldsymbol{P}_{i,j,0}^{(k)}\}, \tag{19}$$

这里 $i+j+k=n$.

证明 只须讨论小三角形 PT_2T_3，取这三角形为座标三角形，其面积座标用 (v_1, v_2, v_3) 来表示. 以 $\{P_{0,j,k}^{(i)}\}(i+j+k=n)$ 为控制点的三角曲面的方程是

$$\sum_{i+j+k=n} B_{i,j,k}^n(v_1, v_2, v_3)P_{0,j,k}^{(i)}. \qquad (20)$$

由前节的公式 (18) 可知

$$\begin{aligned} P_{0,j,k}^{(i)} &= (u_1E_1 + u_2E_2 + u_3E_3)^i P_{0,j,k} \\ &= (u_1E_1 + u_2E_2 + u_3E_3)^i E_2^j E_3^k P_{0,0,0}. \end{aligned}$$

代入 (20)，便得

$$\sum_{i+j+k=n} B_{i,j,k}^n(v_1, v_2, v_3)(u_1E_1 + u_2E_2 + u_3E_3)^i E_2^j E_3^k P_{0,0,0}$$

根据三项式展开，上式可以写为

$$\begin{aligned} &[v_1(u_1E_1 + u_2E_2 + u_3E_3) + v_2E_2 + v_3E_3]^n P_{0,0,0} \\ &= [u_1v_1E_1 + (u_2v_1 + v_2)E_2 + (u_3v_1 + v_3)E_3]^n P_{0,0,0}. \end{aligned}$$

现在回到本章§1的面积座标的转换公式 (9)，在座标三角形 PT_2T_3 内有面积座标 (v_1, v_2, v_3) 的点在 $\mathscr{T}$ 上的面积座标乃是

$$\begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 \\ u_2 & 1 & 0 \\ u_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1v_1 \\ u_2v_1 + v_2 \\ u_3v_1 + v_3 \end{pmatrix},$$

可见 (20) 表示的曲面正好是原先的三角曲面的一部份. 证完.

分割定理可以用图 5.8 形象地表达出来.

现在，我们可以证明定理 5.1 中的第二个结论了. 由 Bézier 三角曲面在角点上的切平面的性质可知，下列三组点

$$P_{0,0,0}^{(n)}, P_{0,1,0}^{(n-1)}, P_{0,0,1}^{(n-1)};$$

$$P_{0,0,0}^{(n)}, P_{1,0,0}^{(n-1)}, P_{0,0,1}^{(n-1)};$$

$$P_{0,0,0}^{(n)}, P_{1,0,0}^{(n-1)}, P_{0,1,0}^{(n-1)}$$

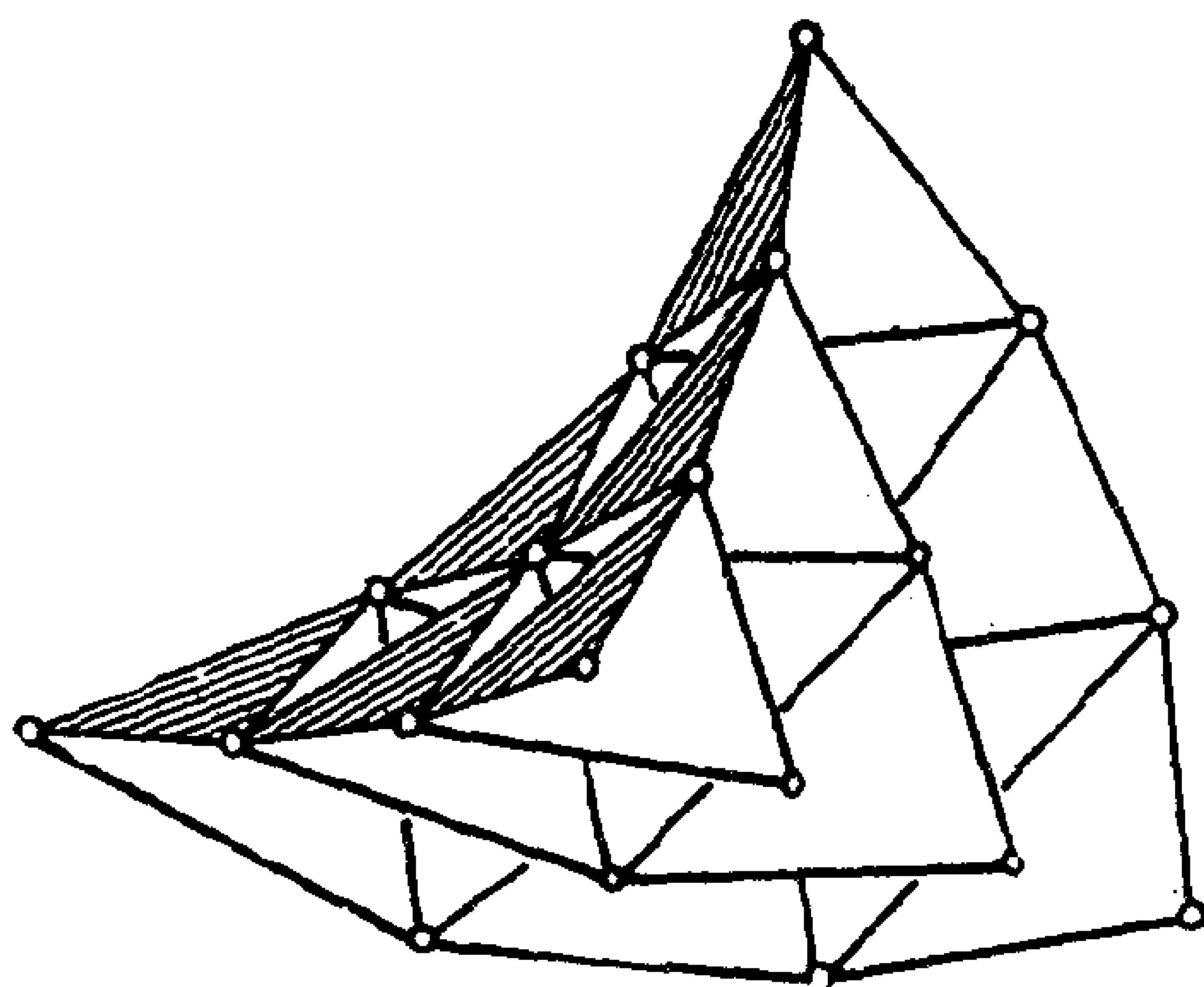


图 5.8 分割定理

分别张成三块小曲面在点 $P^{(n)}_{0,0,0}$处的切平面，但由于它们在点 $P^{(n)}_{0,0,0}$处拼成原先的 Bézier 三角曲面，因此 $P^{(n-1)}_{1,0,0}$，$P^{(n-1)}_{0,1,0}$，$P^{(n-1)}_{0,0,1}$ 张成曲面片（11）在点 $P^{(n)}_{0,0,0}$处的切平面.

在定理 5.2 叙述的分割中，新的座标三角形必须有两个顶点与三角形 $\mathscr{T}$ 的两个顶点相合. 其实，我们还有最一般的分割定理，那就是说新的座标三角形可以与 $\mathscr{T}$ 毫无关系，放在平面上哪里都行. 有兴趣的读者可以参看 [Chang & Davis'84].

在本书第三章讨论 Bézier 曲线的时候，已经详尽地解释了分割定理的意义和作用，只须对个别词句作明显的改动，那些说明对曲面的分割同样适用，这里就不重复了.

§5 升阶公式

任何一张 n 次 Bézier 三角曲面，总可以形式地表为 $n+1$ 次的三角曲面. 在曲面（11）中. Bernstein 系数是 $\{b_{i,j,k}\}$，$i+j$

$+k=n$. 我们把 (11) 改写为

$$B^n(P)=\sum_{i+j+k=n} b_{i,j,k}B^n_{i,j,k}(P)(u_1+u_2+u_3), \tag{21}$$

由于

$$u_1B^n_{i,j,k}(P)=\frac{i+1}{n+1}B^{n+1}_{i+1,j,k}(P),$$

$$u_2B^n_{i,j,k}(P)=\frac{j+1}{n+1}B^{n+1}_{i,j+1,k}(P),$$

$$u_3B^n_{i,j,k}(P)=\frac{k+1}{n+1}B^{n+1}_{i,j,k+1}(P),$$

由此可知 (21) 可以写为

$$B^n(P)=\sum_{i+j+k=n+1} b^*_{i,j,k}B^{n+1}_{i,j,k}(P), \tag{22}$$

其中新的 Bernstein 系数为

$$b^*_{i,j,k}=\frac{1}{n+1}\ (ib_{i-1,j,k}+jb_{i,j-1,k}+kb_{i,j,k-1}), \tag{23}$$

$i+j+k=n+1$ 注意，当 (23) 的右方的某一项出现负的下标时，这一项应当理解为零.

新的 Bernstein 系数确定了剖分 $S_{n+1}(\mathscr{T})$ 上的一张 B-网，称为**升阶 B-网**，它与原来的 B-网定义着同一张三角曲面. 一般来说，升阶 B-网更加贴近三角曲面；升阶之后，控制点增多了，增加了修改曲面的灵活性.

升阶过程可以一次又一次地进行下去，由此得到一个升阶 B-网叙列. 以下证明，当升阶次数趋向于无限大时，这个叙列收敛到它们所对应的 Bézier 三角曲面片.

讨论 n 次 Bézier 三角曲面 (11). 首先要定出进行过 m 次升阶之后，其 Bernstein 系数 $b^{(m)}_{i,j,k}$ 怎样地依赖于最初的 Bernstein 系数.

利用 $u_1+u_2+u_3=1$ 把 (11) 改写为

$$\sum_{i+j+k=n} b_{i,j,k}B^n_{i,j,k}(u_1+u_2+u_3)^m=\frac{m!n!}{(m+n)!}$$

$$\cdot \sum_{i+j+k=n} \sum_{\lambda+\mu+\upsilon=m} b_{i,j,k} \binom{i+\lambda}{i} \binom{j+\mu}{j} \binom{k+\upsilon}{k} B^{m+n}_{i+\lambda,j+\mu,k+\upsilon}$$

令　$r:=i+\lambda, s:=j+\mu,\ t:=k+\upsilon$　故　$r+s+t=m+n$，从而最后一式可以写成

$$\frac{m!n!}{(m+n)!} \sum_{r+s+t=m+n} \sum_{i+j+k=n} b_{i,j,k} \binom{r}{i} \binom{s}{j} \binom{t}{k} B^{m+n}_{r,s,t}(P),$$

可见

$$b^{\langle m\rangle}_{r,s,t} = \frac{m!n!}{(m+n)!} \sum_{i+j+k=n} b_{i,j,k} \binom{r}{i} \binom{s}{j} \binom{t}{k}, \tag{24}$$

由于

$$\frac{m!n!}{(m+n)!} \binom{r}{i} \binom{s}{j} \binom{t}{k}$$

$$= \frac{n!}{i!j!k!} \frac{m!}{(m+n)!} \frac{r!s!t!}{(r-i)!(s-j)!(t-k)!}$$

并注意到

$$\frac{1}{(m+n)^n} \leqslant \frac{m!}{(m+n)!} = \frac{1}{(m+1)\cdots(m+n)} < \frac{1}{m^n},$$

$$(r-i)^i < \frac{r!}{(r-i)!} = (r-i+1)\cdots r \leqslant r^i,$$

$$(s-j)^j < \frac{s!}{(s-j)!} \leqslant s^j,$$

$$(t-k)^k < \frac{t!}{(t-k)!} \leqslant t^k,$$

可知

$$\left(\frac{r-i}{m+n}\right)^i \left(\frac{s-j}{m+n}\right)^j \left(\frac{t-k}{m+n}\right)^k$$

$$\leqslant \frac{m!}{(m+n)!} \frac{r!s!t!}{(r-i)!(s-j)!(t-k)!}$$

$$\leqslant \left(\frac{r}{m}\right)^i \left(\frac{s}{m}\right)^j \left(\frac{t}{m}\right)^k. \tag{25}$$

设当 $m\to\infty$时同时有

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{r}{m+n},\frac{s}{m+n},\frac{t}{m+n}\right)=(u_1,u_2,u_3)\in\mathscr{T},$$

当然也有

$$\lim_{m\to\infty}\frac{r}{m}=\lim_{m\to\infty}\frac{r}{m+n}\,\frac{m+n}{m}=u_1,$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{s}{m}=u_2,\qquad\qquad \lim_{m\to\infty}\frac{t}{m}=u_3,$$

由（25）知

$$\lim_{m\to\infty}\frac{m!\qquad r!s!t!}{(m+n)!(r-i)!(s-j)!(t-k)!}=u_1^iu_2^ju_3^k.$$

再看（24）便知

$$\lim_{m\to\infty}b_{r,s,t}^{\langle m\rangle}=\sum_{i+j+k=n}b_{i,j,k}\frac{n!}{i!j!k!}u_1^iu_2^ju_3^k=B^n\ (u_1,\ u_2,\ u_3)$$

这样，我们就证明了

定理 5. 3（［Farin'79］）当升阶的过程无限制地进行下去时，升阶 B-网叙列在 $\mathscr{T}$ 上收敛到它们所定义的 Bézier 三角曲面片(图 5.9).

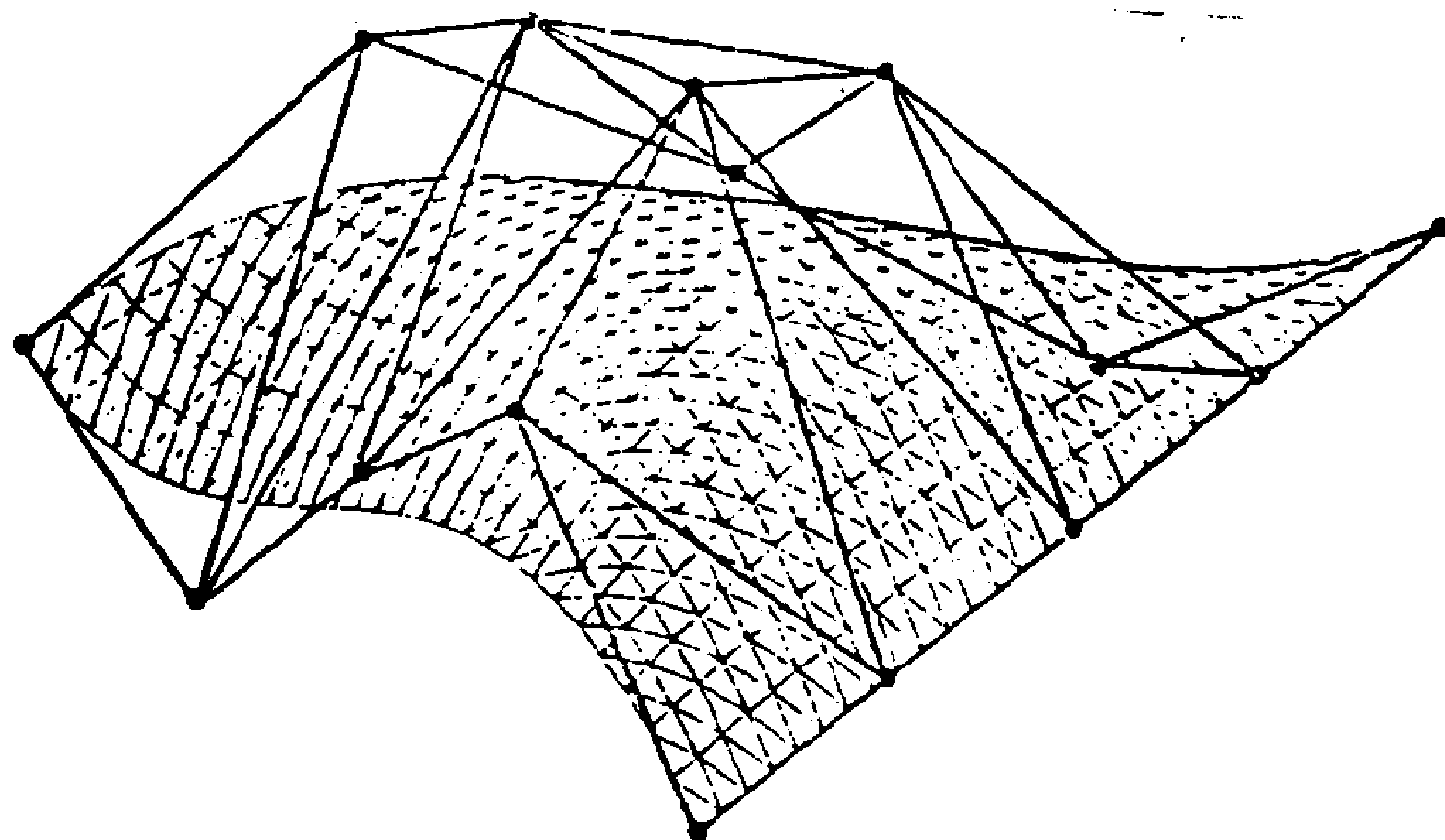


图 5.9　4 次三角曲面及其 B-网

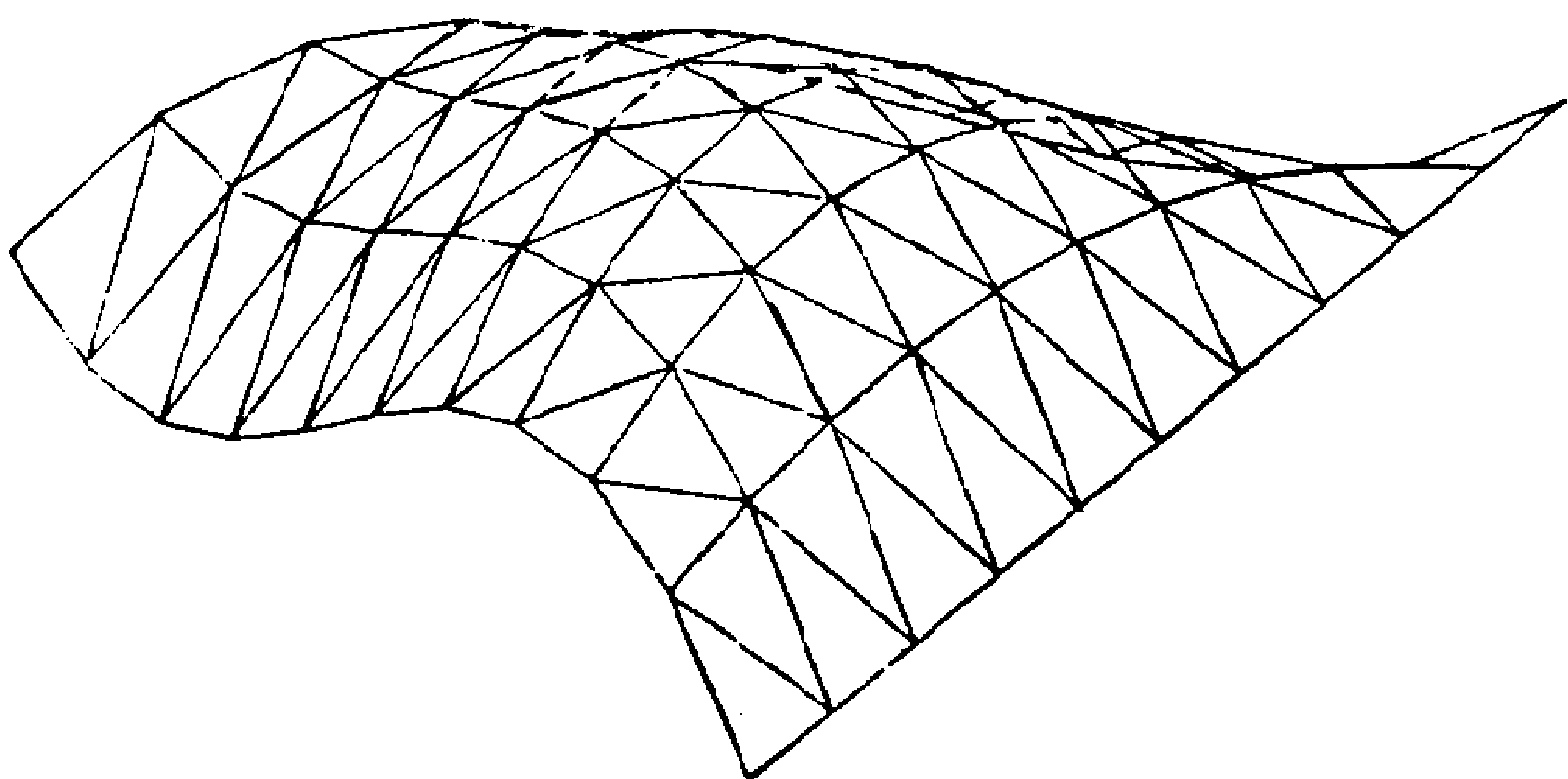


图 5.10　升至 10 阶的 B-网

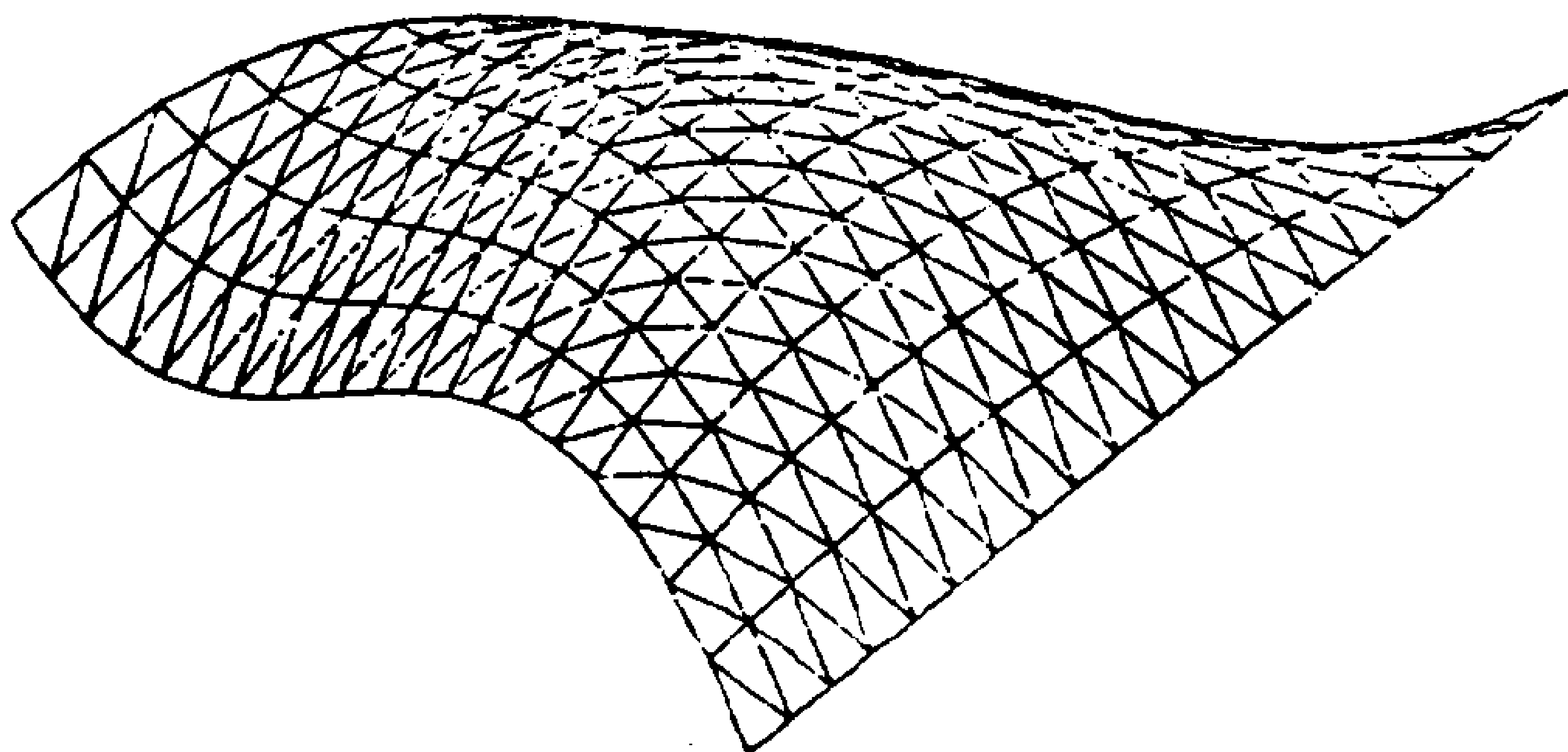


图 5.11　升至 20 阶的 B-网

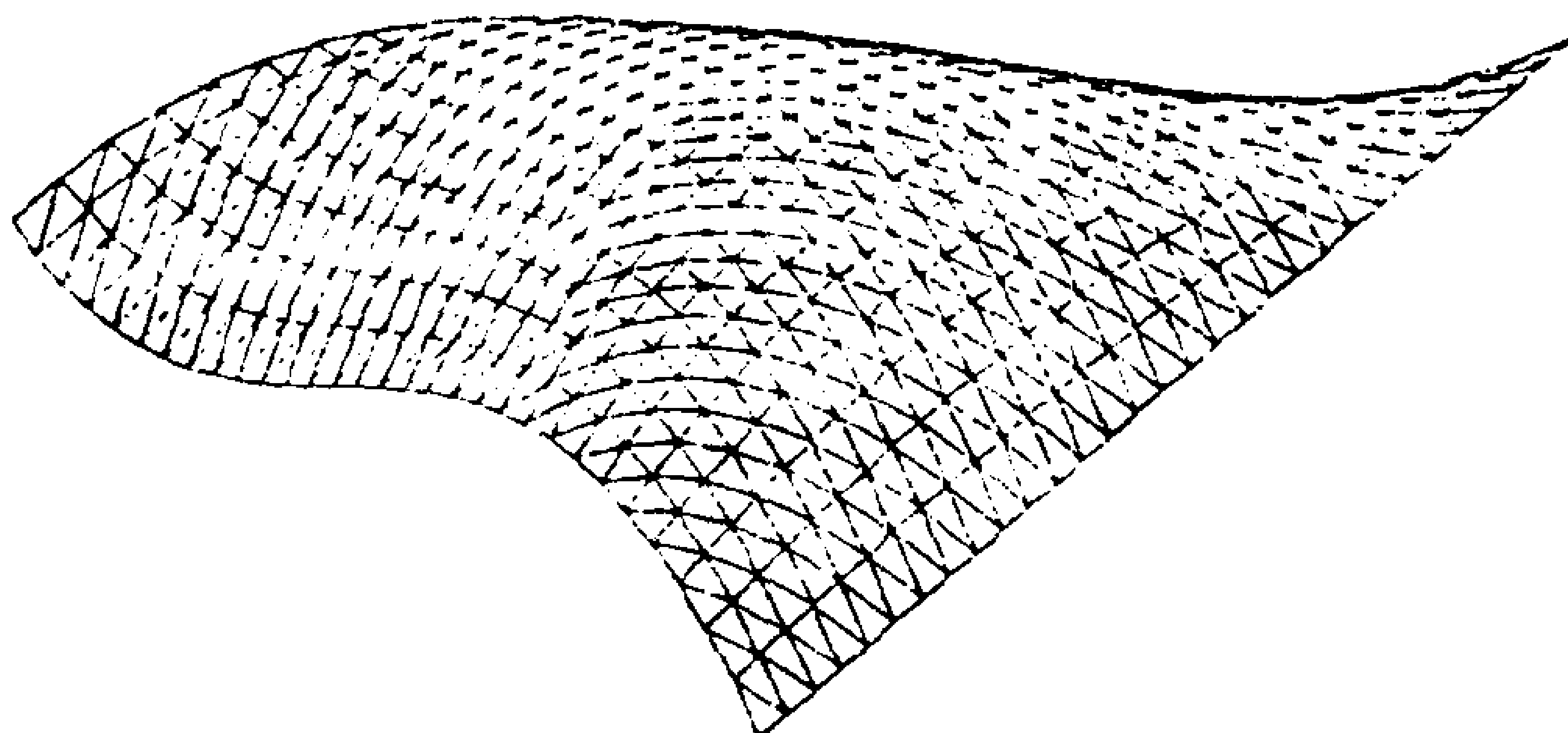


图 5.12　升至 30 阶的 B-网

§6　结束语

我们开始了曲面的讨论，首先选择了 Bézier 三角曲面，为此，引入了“面积座标”，使得许多表达式的计算有代数上的对称性，从分割定理、升阶公式以及升阶 B-网序列的收敛性的证明中，读者也许感到了它们的对称美.

本章的结果是第二章、第三章某些内容的直接推广．在这里，我们没有细说这些结果在应用上的意义，因为第三章中对某些结果在曲线设计方面的应用所作的评注，只需经过明显的修改便可以搬到这里来.

第六章　三角域上的 Bernstein 多项式

在第二章里，我们已经指出，单变量的 Bernstein 多项式是 1912 年由 Bernstein 提出的. 数学家把它推广到多变量的情形，绝不迟于本世纪 40 年代末，因为在专著 [Lorentz'53] 中已经有了种种推广. 从那以后，数学家们对它们的研究，重点放在函数逼近理论方面，而不在实际应用. B-网的概念的产生，应归功于工程技术专家. 根据文献报导，1959 年 de Casteljau 首先考虑了多项式三角曲面片；Lagrange 形式的多项式三角曲面片在有限元方法中有着广泛的应用；1977 年 Sabin 运用 Bernstein 三角曲面片构造了关于正规三角剖分下的 B-样条. 1979 年，Farin 在他的博士论文中，以及在他随后几年的工作中，对 Bernstein 三角多项式在 CAGD 上的应用作了重要贡献，例如前一章所说的升阶及其收敛性，等等，都是具有基本重要性的工作，正因为有了这些奠基性的工作，才吸引了不少数学家参加研究的行列. 由于这些数学家的添枝加叶，才形成如今的洋洋洒洒的 B-网方法. 数学家 Farin 如今成为 CAGD 的公认权

威，很大程度上归因于他的这些工作. 有些作者称 Bézier 三角曲面为 Bernstein-Bézier-Farin 曲面，但大多数学者称之为 Bernstein-Bézier 曲面，或者 B-B 曲面，只是为了简单起见，本书称之为 Bézier 曲面，但这决不是抹煞 Bernstein 的功绩.

Bernstein 对于函数逼近论以及计算机辅助几何设计方面的贡献，是永垂不朽的.

§1 定义及基本性质

设三角形 $\mathscr{T}$ 上已经建立了面积座标系，对任一 $P\in\mathscr{T}$，可以表为 $P=(u_1,u_2,u_3)$ 其中 $u_1\geqslant 0,u_2\geqslant 0,u_3\geqslant 0$ 且 $u_1+u_2+u_3=1$ 设函数 f：$\mathscr{T}\to\mathscr{R}$，定义

$$B^n(f;P):=\sum_{i+j+k=n}f\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n},\frac{k}{n}\right)B^n_{i,j,k}(P) \qquad (1)$$

为 f 的 n 次 **Bernstein 三角多项式**.

由定义可知，前一章中所讨论的 Bernstein 形式正是它的 B-网的 Bernstein 多项式.

如果函数 f 只依赖于 u_1，u_2，u_3 中的一个独立变量，例如说只依赖于 u_1，这时把 f 写成 $f\ (u_1)$，按定义 (1)，有

$$\begin{aligned}B^n(f;P)&=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\\&\quad\times u_1^iu_2^ju_3^{n-i-j}\\&=\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\binom{n}{i}u_1^i\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n-i}{j}u_2^ju_3^{n-i-j}\\&=\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\binom{n}{i}u_1^i(u_2+u_3)^{n-i}\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\binom{n}{i} u_1^i (1-u_1)^{n-i},$$

这里的最后一式正是单变量函数 f 的 n 次 Bernstein 多项式，因此，利用第二章的结果，得

$$\left.\begin{aligned} &B^n(1;P) = 1 \\ &B^n(u_i;P) = u_i, \\ &B^n(u_i^2;P) = \left(1-\frac{1}{n}\right)u_i^2 + \frac{1}{n}u_i, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$i = 1,2,3.$

也可以把由 (1) 所定义的 B^n 当成一个算子，它把函数 f 映射为 (1) 式右方的多项式，算子 B^n 显然是线性的，由 (2) 可知：u_1，u_2，u_3 的线性函数是 B^n 的不动点.

如果 $f(P) \geqslant 0$ 对一切 $P \in \mathscr{T}$ 成立，由 (1) 显然可见 $B^n(f;P) \geqslant 0$ 对一切 $P \in \mathscr{T}$ 成立，这说明 B^n 是正线性算子，同样明显的是

$$B^n(f;T_i) = f(T_i), \quad i = 1,2,3,$$

也就是说在三角形 $\mathscr{T}$ 的三个顶点上，$B^n(f;P)$ 插值于 f.

三角域上的 Bernstein 多项式之所以在函数逼近论中有着重要的地位，原因之一是我们有下列

定理 6.1 如果 f 是 $\mathscr{T}$ 上的连续函数，那么

$$\lim_{n\to\infty} B^n(f;P) = f(P)$$

在 $\mathscr{T}$ 上一致地成立.

称这个定理为 **Bernstein 逼近定理**.

由于我们的重点不是讨论函数逼近论，这里就不给出定理 6.1 的证明.

§ 2 凸函数的 Bernstein 多项式

函数 $f: \mathscr{T} \to \mathscr{R}$ 称为在 $\mathscr{T}$ 上是凸的，是指对一切 $P, Q \in \mathscr{T}$ 及一切 $\alpha \in [0, 1]$ 有不等式

$$f((1-\alpha)P + \alpha Q) \leqslant (1-\alpha)f(P) + \alpha f(Q). \quad (3)$$

设 f 是 $\mathscr{T}$ 上的凸函数，则对于 P_1，P_2，$P_3 \in \mathscr{T}$ 及非负的 α_i $(i=1, 2, 3)$ 且 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$，有

$$f\left(\sum_{i=1}^{3}\alpha_i P_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{3}\alpha_i f(P_i). \quad (4)$$

不等式（4）可以利用（3）而证得：

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{3}\alpha_i P_i\right) &= f\left((\alpha_1+\alpha_2)\left(\frac{\alpha_1 P_1+\alpha_2 P_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)+\alpha_3 P_3\right) \\ &\leqslant (\alpha_1+\alpha_2) f\left(\frac{\alpha_1 P_1+\alpha_2 P_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)+\alpha_3 f(P_3) \\ &\leqslant (\alpha_1+\alpha_2)\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2} f(P_1)+\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} f(P_2)\right] \\ &\quad + \alpha_3 f(P_3) \\ &= \sum_{i=1}^{3}\alpha_i f(P_i). \end{aligned}$$

在第二章中已经看到，对于单变量函数 f，若 f 在 $[0, 1]$ 上是凸的，则 f 的 Bernstein 多项式也是 $[0, 1]$ 上的凸函数. 出人意料的是，这个结论不能直接地推广到三角域上的 Bernstein 多项式，这由以下的反例可见.

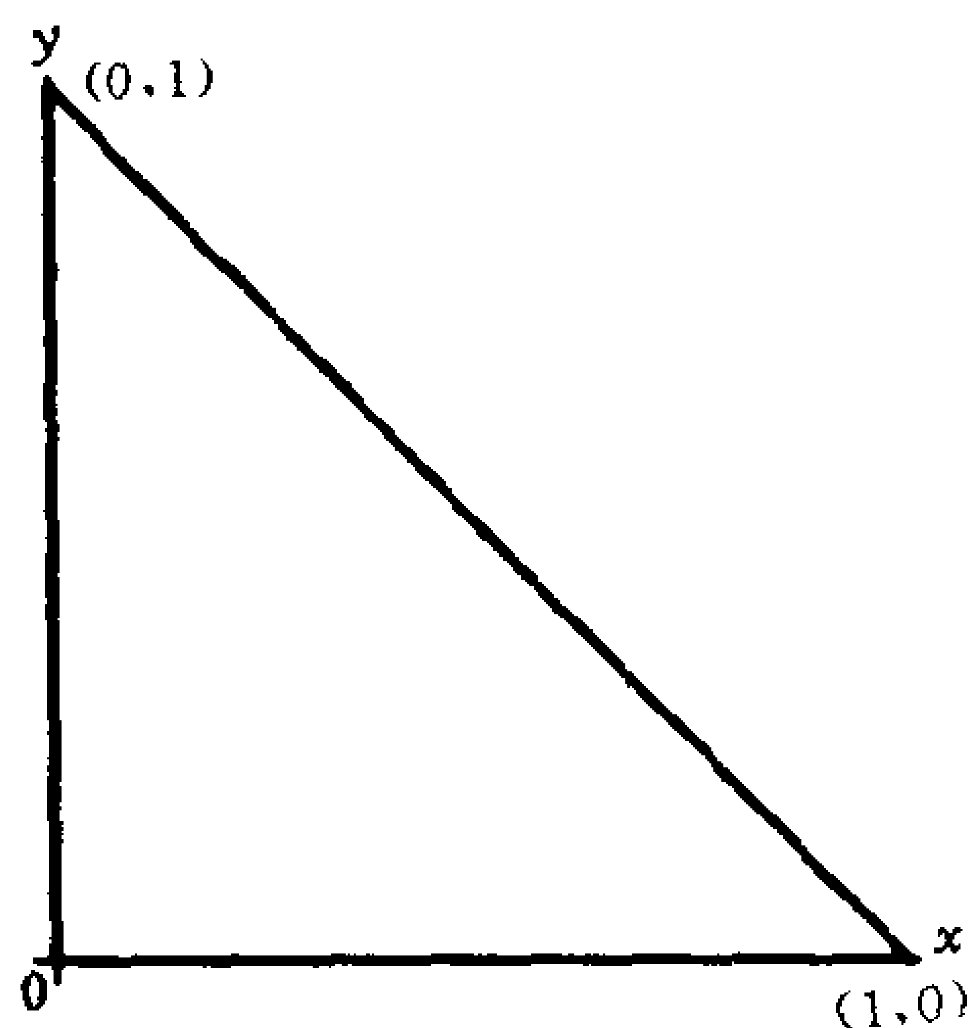


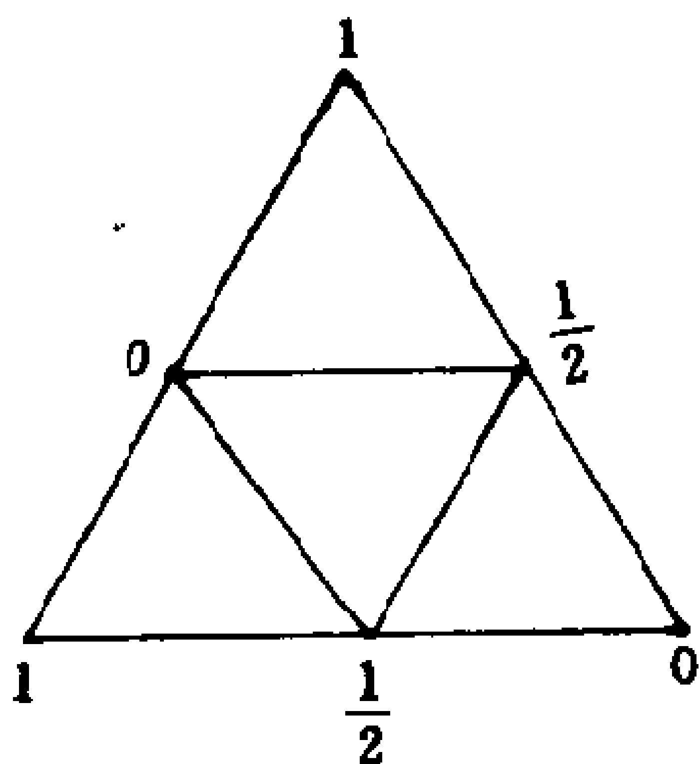
图 6.1

在直角坐标系 Oxy 中，考察三角形区域：

$$\mathscr{T}: x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant 1.$$

这是一个等腰直角三角形（图 6.1）.

在 $\mathscr{T}$ 上讨论函数 $f(x,y)=|x-y|$，它在 $\mathscr{T}$ 上显然是凸的，令 $T_1=(1,0)$，$T_2=(0,1)$，$T_3=(0,0)$，这时 $\mathscr{T}$ 中的点的面积坐标是 $(x,y,1-x-y)$. f 的二次 Bernstein 多项式的 Bernstein 系数是



从而对应的 Bernstein 多项式是

$$B^2(f;x,y)=$$

$$(x,y,1-x-y)\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix};$$

展开上式的右边，得

$$B^2(f;x,y)=x+y-2xy.$$

它不是一个凸函数，因为

$$B^2(f;0,0)=0, B^2\left(f;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}, B^2\left(f;\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{8},$$

故有

$$\frac{1}{2}\left[B^2(f;0,0)+B^2\left(f;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{4}<\frac{3}{8}=B^2\left(f;\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right),$$
与定义(3)中取 $\alpha=1/2$ 得到的不等式矛盾.

这就是说，有这样的二元凸函数，它的 Bernstein 三角多项式不是凸函数.

虽然如此，凸函数的 Bernstein 多项式仍具有某些特殊的性质，例如第二章的其他许多定理便可以推广到三角域的情形.

设函数 f 在 $\mathscr{T}$ 上是凸的，考察 f 的 n 次 Bernstein 多项式 $B^n(f;P)$，经过升阶之后(见第 5 章公式(23))

$$B^n(f;P)=\frac{1}{n+1}\sum_{i+j+k=n+1}\left[if\left(\frac{i-1}{n},\frac{j}{n},\frac{k}{n}\right)+jf\left(\frac{i}{n},\frac{j-1}{n},\frac{k}{n}\right)+kf\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n},\frac{k-1}{n}\right)\right]\cdot B_{i,j,k}^{n+1}(P) \tag{5}$$

由于 f 是凸函数，并注意到

$$\frac{i}{n+1}\left(\frac{i-1}{n},\frac{j}{n},\frac{k}{n}\right)+\frac{j}{n+1}\left(\frac{i}{n},\frac{j-1}{n},\frac{k}{n}\right)+\frac{k}{n+1}\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n},\frac{k-1}{n}\right)=\left(\frac{i}{n+1},\frac{j}{n+1},\frac{k}{n+1}\right), \tag{6}$$

可得

$$\frac{i}{n+1}f\left(\frac{i-1}{n},\frac{j}{n},\frac{k}{n}\right)+\frac{j}{n+1}f\left(\frac{i}{n},\frac{j-1}{n},\frac{k}{n}\right)+\frac{k}{n+1}f\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n},\frac{k-1}{n}\right)\geqslant f\left(\frac{i}{n+1},\frac{j}{n+1},\frac{k}{n+1}\right). \tag{7}$$

再由(5)得出

$$B^n(f;P) \geqslant \sum_{i+j+k=n+1} f\left(\frac{i}{n+1},\frac{j}{n+1},\frac{k}{n+1}\right) B^{n+1}_{i,j,k}(P)$$

上式右边正好是 f 的 $n+1$ 次 Bernstein 多项式．这就是说，如果 f 在 $\mathscr{T}$ 上凸，那么有

$$B^n(f;P) \geqslant B^{n+1}(f;P) \tag{8}$$

对于 $n\in\mathscr{N}$ 及 $P\in\mathscr{T}$ 成立，即 $\{B^n(f;P)\}$ 是一个递减的叙列．如果对某一固定的 $n\in\mathscr{N}$，(8) 式中的等号对 $P\in\mathscr{T}$ 成立，必需而且只需在（7）式中对一切适合 $i+j+k=n+1$ 的（i，j，k）成立着等号．为了给出这一事实的几何解释，需要再引入一个名词"向下子三角形"

在剖分 $S_n(\mathscr{T})$ 中，具有顶点

$$\left(\frac{i-1}{n},\frac{j}{n},\frac{k}{n}\right),\left(\frac{i}{n},\frac{j-1}{n},\frac{k}{n}\right),\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n},\frac{k-1}{n}\right)$$

(其中正整数 i，j，k 适合 $i+j+k=n+1$) 的子三角形叫做**向下子三角形**，见图 6.2 中的涂成了黑色的三角形．这样的三角形的个数为 $(n-1)n/2$．由公式（6）可知，结点 $\left(\frac{i}{n+1},\frac{j}{n+1},\frac{k}{n+1}\right)$ 或者落在一个向下子三角形中，或者落在 $\mathscr{T}$ 的边界上；落在 $\mathscr{T}$ 的边界（记为 $\partial\mathscr{T}$）的这种结点的数目为 3 ($n+1$)．用 $\mathscr{D}_n$ 来表示 S_n ($\mathscr{T}$) 中所有的向下子三角形的集合．由于 f 在 $\mathscr{T}$ 上的凸性，成立着等号的（7）意味着 f 在 $\mathscr{D}_n$ 的每一个子三角形上是线性的，在 $\partial\mathscr{T}$ 的每一小段上也是线性的．

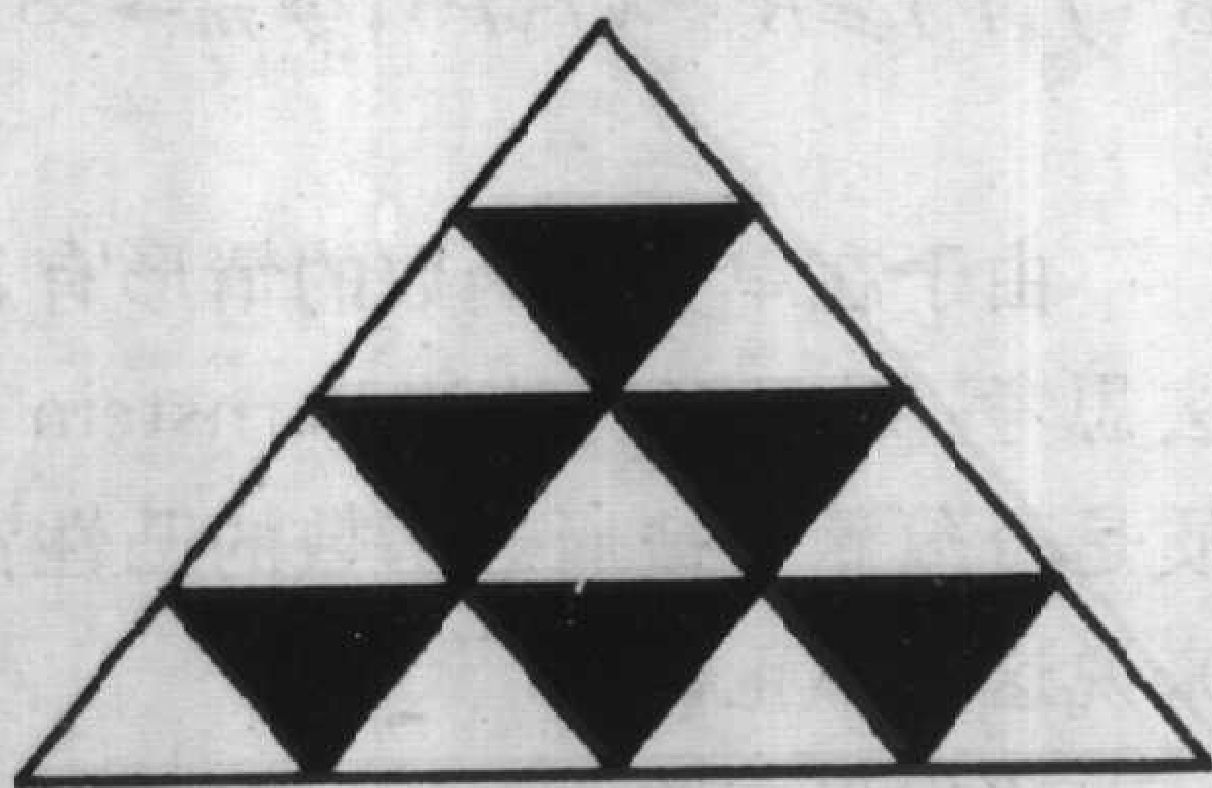


图 6.2　向下子三角形

以 f (i/n, j/n, k/n)，$i+j+k=n$，为 Bernstein 系数可以

定义一个 n 阶 B-网，称为 f 的 n **阶 B-网**，用 $\hat{f}_n$ 来记．我们已经证明了

定理 6.2（[Chang & Davis'84]）设函数 f 是 $\mathscr{T}$ 上的连续的凸函数，用 $\mathscr{D}_n$ 表示剖分 $S_n(\mathscr{T})$ 中一切向下子三角形的并集，那么 $B^n(f;P)=B^{n+1}(f;P)$ 对 $P\in\mathscr{T}$ 成立的必要充分条件是

$$f(P)=\hat{f}_n(P),\text{其中 } P\in\mathscr{D}_n\cup\partial\mathscr{T},$$

不然的话 $B^n(f;P)>B^{n+1}(f;P)$ 对 P 为 $\mathscr{T}$ 的内点时成立．

作为定理 6.2 的直接推论，我们有

定理 6.3　设 f 是 $\mathscr{T}$ 上的连续凸函数，则对任何 $n\in\mathscr{N}$ 有

$$B^n(f;P)\geqslant f(P)$$

对一切 $P\in\mathscr{T}$ 成立．

证明　由定理 6.2，对任何固定的 $n\in\mathscr{N}$ 以及任何 $m\in\mathscr{N}$ 有 $B^n(f;P)\geqslant B^{n+m}(f;P)$，令 $m\to\infty$，依定理 6.1 立得结论．

由于在单变量函数的情形有 Kosmak 定理，这就提示我们去思考：对于多变数的 Bernstein 多项式序列，其单调递降的性质是否蕴涵着被逼近函数的凸性？简单的例子告诉我们，一般来说这是不正确的．

我们仍在图 6.1 所示的三角形上讨论函数 $f(x,y):=-xy$．注意，xy 的 n 次 Bernstein 多项式是

$$\sum_{i+j+k=n}\frac{ij}{n^2}\frac{n!}{i!j!k!}x^iy^j(1-x-y)^k$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)xy\sum_{i+j+k=n}\frac{(n-2)!}{(i-1)!(j-1)!k!}$$

$$x^{i-1}y^{j-1}(1-x-y)^k$$

在最后一式中用 i，j 分别来替换 $i-1$，$j-1$，得到

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)xy\sum_{i+j+k=n-2}\frac{(n-2)!}{i!j!k!}x^iy^j(1-x-y)^k$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)xy,$$

因此　$B^n(f;x,y)=-\left(1-\frac{1}{n}\right)xy$，显然有

$$B^n(f;x,y)\geqslant B^{n+1}(f;x,y)$$

对 $n\in\mathcal{N}$ 与 (x,y) 在三角形上成立，但是，f 不是凸函数，这是因为

$$f(0,0)=0,\ f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4},\ f\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{16}$$

而

$$\frac{1}{2}\left[f(0,0)+f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right]=-\frac{1}{8}<-\frac{1}{16}=f\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right).$$

有了这个反例之后，张景中与常庚哲力图探索 Bernstein 多项式序列的递减性质究竟在多大的程度上刻画出函数 f 的几何特征，他们的结论是：

定理 6.4　设 f 是定义在三角形域 $\mathcal{T}$ 上的连续函数并且适合

$$B^n(f;P)\geqslant f(P),\quad P\in\mathcal{T},\tag{9}$$

对一切 $n\in\mathcal{N}$ 成立，那么函数 f 在 $\mathcal{T}$ 的内点上不能取到严格的局部极大值.

我们说 $f(P_0)$是 f 的一个**严格的局部极大值**，是指$f(P_0)$是一个局部极大值并且在 P_0 的任何一个邻域内 f 不等于常数，也就是说，在 P_0 的任何充分小的邻域内，都存在一个点使得 f 在此点上的值小于 f (P_0).

由定理 6.4 显然可以方便地推出

定理 6.5 设 f 是 $\mathscr{T}$ 上的一个连续函数并且适合

$$B^n(f;P) \geqslant B^{n+1}(f;P), \quad P \in \mathscr{T}, \tag{10}$$

对一切 $n \in \mathscr{N}$ 成立，那么函数 f 在 $\mathscr{T}$ 的内点上不能取到严格的局部极大值.

证明 由于(10)，对任何固定的 $n \in \mathscr{N}$ 及 $m \in \mathscr{N}$，可得

$$B^n(f;P) \geqslant B^{n+m}(f;P), P \in \mathscr{T}$$

在上式双方令 $m \to \infty$，由于收敛性定理 6.1，立刻得出 (9)，援用定理 6.4 便得出结论.

由于定理 6.4 的证明比较冗长，我们略去不证，有兴趣的读者可参看 [Chang & Zhang'90].

以上的两个定理可称为**凸性的逆定理**，它们可以被推广到高维单纯形上的 Bernstein 多项式上，详细的讨论见张景中等人在《中国科学》(1989 年第 6 期 588—599) 上的文章.

[Dahmen & Micchelli'90] 也做了类似的推广. 他们使用了半群理论和二阶椭圆型微分算子的最大值原理，得出了较我们的结果为弱的定理. 他们的基域是更高维的单纯形（见本书的第七章)，这里我们还是针对三角形域来叙述. 下面的简洁证明取自 [Sauer'92].

定理 6. 6 设函数 f 在 $\mathscr{T}$ 上连续并且(9)或者(10)对一切 $n \in \mathscr{N}$ 成立，那么 f 的最大值只能在 $\mathscr{T}$ 的边界上达到.

证明 如果 f 在 $\mathscr{T}$ 上是常数，结论是不证自明的，故设 f 在 $\mathscr{T}$ 上不是常数. 假设在 $\mathscr{T}$ 的内部的一点 P_0 使得 $f(P_0)$ 是 f 在 $\mathscr{T}$ 上的最大值. 故存在 $m \in \mathscr{N}$，并且可找到整数组 (i_0, j_0, k_0) 适合 $i_0 + j_0 + k_0 = m$，使得

$$f(P_0) > f\left(\frac{i_0}{m},\frac{j_0}{m},\frac{k_0}{m}\right).$$

注意到 $B^m_{i,j,k}(P_0) > 0, i+j+k=m$,因此

$$f(P_0) = \sum_{i+j+k=m} f(P_0)B^m_{i,j,k}(P_0)$$
$$> \sum_{i+j+k=m} f\left(\frac{i}{m},\frac{i}{m},\frac{k}{m}\right) B^m_{i,j,k}(P_0)$$
$$= B^m(f;P_0).$$

与(10)矛盾,这样就证完了定理 6.6.

在结束本节的时候,我们来证明:在定理 2.6 中可以放弃 f 有连续的二阶导数的条件代之以 f 连续的条件,结论照样正确,也就是说,给 Ziegler 的定理作出一个另外的证明.

定理 6.7 ([Ziegler'67]) 设 $f:[0,1]\to\mathscr{R}$ 为连续函数且

$$B^n(f;x) \geqslant B^{n+1}(f;x), x\in[0,1], \tag{11}$$

或

$$B^n(f;x) \geqslant f(x), x\in[0,1], \tag{12}$$

对 $n\in\mathscr{N}$ 成立,那么 f 是 [0, 1] 上的凸函数.

证明 用反证法,假设 f 不是 [0, 1] 上的凸函数,故有二点 x_1, x_2 适合 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$ 使

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2)). \tag{13}$$

作线性函数

$$l(x):=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2). \tag{14}$$

讨论函数

$$g(x):=f(x)-l(x).$$

由（14）知　$g(x_1)=g(x_2)=0$ 并且

$$g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>0, \tag{15}$$

令

$$M:=\max_{x\in[x_1,x_2]} g(x)>0,$$

$$x_0:=\inf\{x:x\in[x_1,x_2]\text{ 且 }g(x)=M\}$$

最后一式说的是：x_0 是在开区间 (x_1, x_2) 中最靠左边那一个使 g 取值 M 的点，由 g 的连续性，这一点总是存在的．显然，在 x_0 这一点上函数 g 取得严格的局部极大值，这是因为在任何一个包含 x_0 的开区间中总有使得 f 取值小于 M 的点．设（12）成立，则对于 $n\in\mathscr{N}$

$$\begin{aligned}B^n(g;x)&=B^n(f-l;x)=B^n(f;x)-B^n(l;x)\\&=B^n(f;x)-l(x)\geqslant f(x)-l(x)\\&=g(x),\end{aligned}$$

这便与定理 6.4 相违背．于是定理 6.7 得证．

在上述证明中，我们利用了这样的事实：定理 6.4 与定义域的维数没有关系，把其中三角域上的连续函数改为区间 [0, 1] 上的连续函数，结论仍然正确．

§3　迭代极限与磨光性质

单变量的 Bernstein 算子的迭代极限，即 Kelisky-Rivlin 定理，在第二章 §5 中已经作过介绍．常庚哲与冯玉瑜将这一定理推广到多变量的 Bernstein 算子，包括立方体上与单纯形上这两种情形，见 [Chang & Feng'86]

这里设 B^n 是三角域上的 Bernstein 算子，本章公式（1）写出了它的定义. 已经指明，B^n 是正线性算子.

用 $(B^n)^{(m)}$ 表示算子 B^n 的 m 次迭代，其中 $m\in\mathscr{N}$，即将算子 B^n 连续地作用 m 次，于是有

定理 6. 8 设 f：$\mathscr{T}\to\mathscr{R}$，则有

$$\lim_{m\to\infty}(B^n)^{(m)}(f;P)=u_1f(T_1)+u_2f(T_2)+u_3f(T_3),$$

这里 T_1，T_2，T_3 是三角形 $\mathscr{T}$ 的三个顶点，而 (u_1, u_2, u_3) 是点 P 关于座标三角形 $\mathscr{T}$ 的面积座标.

定理 6. 8 揭示出算子 B^n 的"磨光性质"，精确地说，在算子 B^n 无限次地反复作用之下，任何一张三角曲面最终变成了由这曲面的三个角点决定的平面.

证明 由于经过 B^n 的一次作用之后，函数 f 变成了一个 u_1，u_2，u_3 的多项式，无妨设 f 本身就是一个多项式：

$$f(P)=\sum_{i+j+k=n}\alpha_{i,j,k}u_1^iu_2^ju_3^k,$$

这里 $\alpha_{i,j,k}(i+j+k=n)$ 为实数. 在上式中，除了 $\alpha_{n,0,0}u_1^n$，$\alpha_{0,n,0}u_2^n$，$\alpha_{0,0,n}u_3^n$ 之外，其他的项都涉及两个或三个面积座标. 考察一个这样的项，例如 $\alpha_{1,2,n-3}u_1u_2^2u_3^{n-3}$，由于

$$0\leqslant u_1u_2^2u_3^{n-3}\leqslant u_1u_2$$

因此

$$0\leqslant B^n(u_1u_2^2u_3^{n-3})\leqslant B^n(u_1u_2)=\left(1-\frac{1}{n}\right)u_1u_2$$

m 次迭代之后

$$0\leqslant (B^n)^{(m)}(u_1u_2^2u_3^{n-3})\leqslant\left(1-\frac{1}{n}\right)^m u_1u_2$$

令 $m\to\infty$，得出

$$\lim_{m\to\infty}(B^n)^{(m)}(u_1u_2^2u_3^{n-3})=0.$$

由此可知

$$\lim_{m\to\infty}(B^n)^{(m)}(f;P) = \alpha_{n,0,0}\lim_{m\to\infty}(B^n)^{(m)}(u_1^n) + \alpha_{0,n,0}\lim_{m\to\infty}(B^n)^{(m)}(u_2^n) + \alpha_{0,0,n}\lim_{m\to\infty}(B^n)^{(m)}(u_3^n).$$

在本章的 § 1 中已指出，如果算子 B^n 作用在只含一个面积座标的函数上，它就可以被看成是单变量的 Bernstein 算子，因此，根据单变量的 Kelisky-Rivlin 定理可知

$$\lim_{m\to\infty}(B^n)^{(m)}(u_i^n) = u_i, \qquad i = 1,2,3,$$

于是

$$\lim_{m\to\infty}(B^n)^{(m)}(f;P) = \alpha_{n,0,0}u_1 + \alpha_{0,n,0}u_2 + \alpha_{0,0,n}u_3.$$

再由

$$\alpha_{n,0,0} = f(T_1),$$
$$\alpha_{0,n,0} = f(T_2),$$
$$\alpha_{0,0,n} = f(T_3),$$

得出

$$\lim_{m\to\infty}(B^n)^{(m)}(f;P) = \sum_{i=1}^{3} f(T_i)u_i,$$

证完.

这说明三角域上的 Bernstein 算子也具有磨光性质.

§ 4　结束语

本章讨论定义在三角形域上的函数的 Bernstein 多项式，将本章的内容与第二章中定义在区间 [0, 1] 上的 Bernstein 多项

式的理论作一比较是很有意义的. 它们有许多共同的性质. 单变数的 Bernstein 多项式的某些定理，比如说收敛性定理、Kelisky-Rivlin 定理，可以直接地推广到三角域上的 Bernstein 多项式上来. 一般来说，凡是能作这样的推广的，作出推广的证明不会有本质的困难.而另外一些定理不可以有直接的推广，怎样找到适当的推广并加一证明，往往比较困难. 一元的 Bernstein 多项式有保凸的性质，但三角域上的 Bernstein 多项式却没有这种性质，就是说，如果 f 是 $\mathscr{T}$ 上的凸函数，一般不能断定 f 的三角 Bernstein 多项式也是凸的. 怎样作出一个恰当的推广，我们将在第八章中详细讨论.

下一章中，我们将回到三角域上 Bézier 曲面的研究.

第七章　Bézier 三角曲面的正性

在本章中，我们又回过来研究定义在三角形 $\mathscr{T}$ 上的 Bézier 曲面

$$B^n(P)=\sum_{i+j+k=n} b_{i,j,k}B^n_{i,j,k}(P) \tag{1}$$

如果 $B^n(P)\geqslant 0$，$P\in\mathscr{T}$，称 $B^n(P)$ 在 $\mathscr{T}$ 上是**正的**；如果 $B^n(P)>0$，$P\in\mathscr{T}$，称 $B^n(P)$ 在 $\mathscr{T}$ 上是**严格正的**.

我们的目的是通过其 Bernstein 系数 $b_{i,j,k}$ 来刻划曲面为正的（或严格正的）的条件．由(1)显然可见，如果一切 $b_{i,j,k}\geqslant 0$，$i+j+k=n$，那么 $B^n(P)$ 在 $\mathscr{T}$ 上便是正的，不过，这只是一个很粗糙的充分条件，远远不是必要的.

十分有趣的是，我们将看到，二次 Bézier 曲面的正性与 **copositive 矩阵**有着最密切的联系．令人鼓舞的是，采用 **CAGD** 中的方法，为研究 copositive 矩阵开辟了一个新的途径.

§ 1　二次 Bézier 三角曲面的正性

一次 Bézier 三角曲面乃是

$$B^1(P) = b_{1,0,0}u_1 + b_{0,1,0}u_2 + b_{0,0,1}u_3 ,$$

很明白，B^1（P）在 $\mathscr{T}$ 上为正（严格正）当且只当

$$b_{1,0,0} \geqslant (>) 0, b_{0,1,0} \geqslant (>) 0, b_{0,0,1} \geqslant (>) 0.$$

对 $n \geqslant 2$，一切 Bernstein 系数非负只是 B^n（P）的正性的一个充分条件，而远非必要.

汪争斌、刘启铭当他们还是中国科学技术大学三年级学生的时候，提出了一个更好一些的、使 B^n（P）为正的充分条件.

定理 7. 1　（[Wang & Liu'88]）　如果

$$\left.\begin{aligned} & b_{n,0,0} + (n-1)! \sum_{\substack{i+j+k=n \\ b_{i,j,k}<0}} \frac{i}{i!j!k!} b_{i,j,k} \geqslant 0, \\ & b_{0,n,0} + (n-1)! \sum_{\substack{i+j+k=n \\ b_{i,j,k}<0}} \frac{j}{i!j!k!} b_{i,j,k} \geqslant 0, \\ & b_{0,0,n} + (n-1)! \sum_{\substack{i+j+k=n \\ b_{i,j,k}<0}} \frac{k}{i!j!k!} b_{i,j,k} \geqslant 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

则 B^n（P）在 $\mathscr{T}$ 上是正的.

证明　由(1)知

$$b_{n,0,0} \geqslant 0, b_{0,n,0} \geqslant 0, b_{0,0,n} \geqslant 0.$$

利用几何平均一算求平均不等式，我们有

$$\begin{aligned} u_1^i u_2^j u_3^k &= (u_1^{ni} u_2^{nj} u_3^{nk})^{1/n} \\ &\leqslant \frac{iu_1^n + ju_2^n + ku_3^n}{n}, \end{aligned} \tag{2}$$

由(2)立得

$$u_1^i u_2^j u_3^k \leqslant \frac{i}{n} u_1^n + \frac{j}{n} u_2^n + \frac{k}{n} u_3^n. \tag{3}$$

注意,(3)对于适合 $i+j+k=n$ 的一切非负整数 i,j,k 均成立.

由此推出

$$B_{i,j,k}^n(P) \leqslant \frac{n!}{i!j!k!}\left(\frac{i}{n} u_1^n + \frac{j}{n} u_2^n + \frac{k}{n} u_3^n\right)$$

$$= \frac{(n-1)!}{i!j!k!}(i u_1^n + j u_2^n + k u_3^n).$$

因此,对于适合 $b_{i,j,k}<0$ 的 $b_{i,j,k}$,有

$$\sum_{i+j+k=n} b_{i,j,k} B_{i,j,k}^n(P) \geqslant b_{n,0,0} u_1^n + b_{0,n,0} u_2^n$$

$$+ b_{0,0,n} b_3^n + \sum_{b_{i,j,k}<0} b_{i,j,k} B_{i,j,k}^n(P)$$

$$\geqslant \Big(b_{n,0,0} + (n-1)! \sum_{b_{i,j,k}<0} \frac{i}{i!j!k!} b_{i,j,k} \Big) u_1^n$$

$$+ \Big(b_{0,n,0} + (n-1)! \sum_{b_{i,j,k}<0} \frac{j}{i!j!k!} b_{i,j,k} \Big) u_2^n$$

$$+ \Big(b_{0,0,n} + (n-1) \sum_{b_{i,j,k}<0} \frac{k}{i!j!k!} b_{i,j,k} \Big) u_3^n \geqslant 0,$$

定理 7.1 证毕.

考察下列数值例子,设二次 Bézier 三角曲面的 Bernstein 系数由下图给出

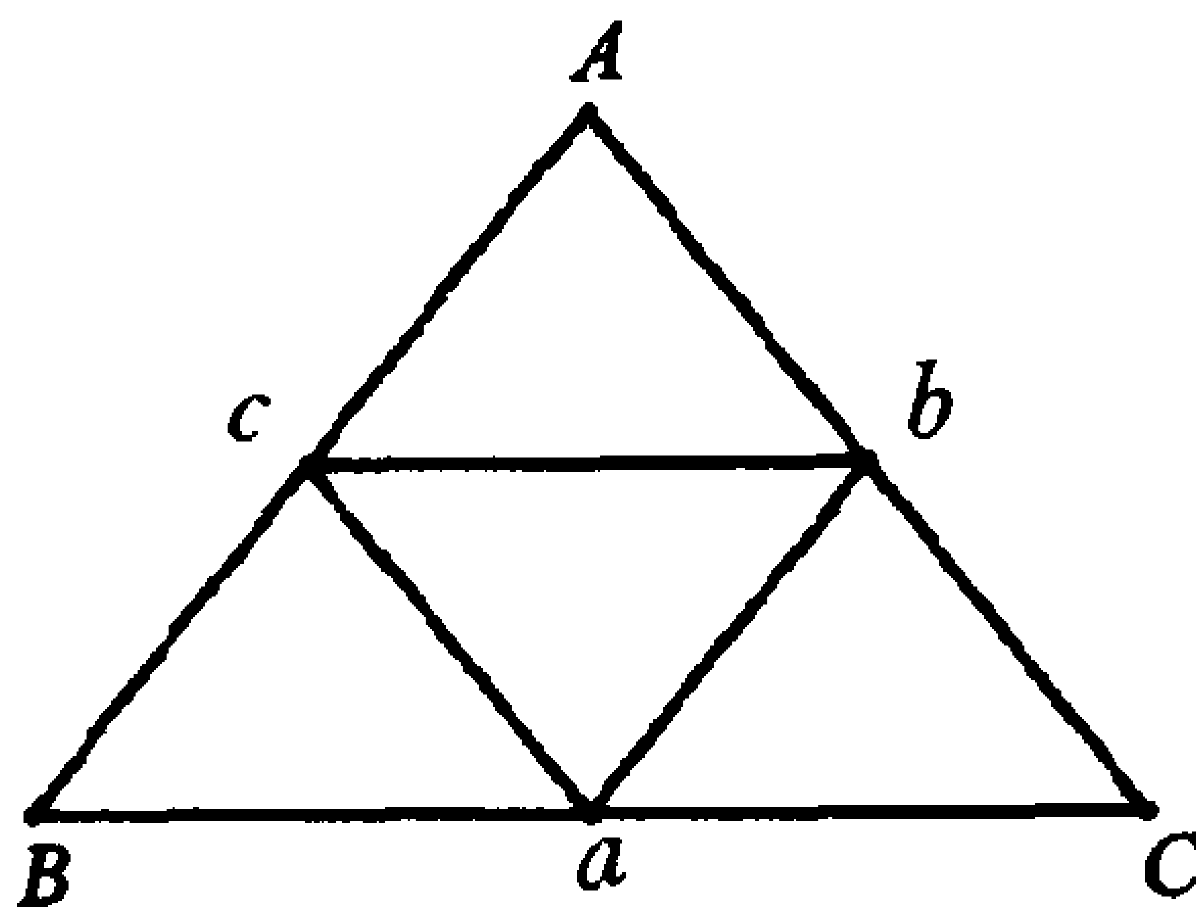


图 7.1

由定理 7.1 推出，如果 A，B，$C\geqslant 0$ 而 a，b，$c<0$，那么当它们适合

$$A+b+c\geqslant 0, B+c+a\geqslant 0, C+a+b\geqslant 0 \quad (2)$$

时，对应的二次曲面在区域 $\mathscr{T}$ 上是正的. 特别地，由下列数据

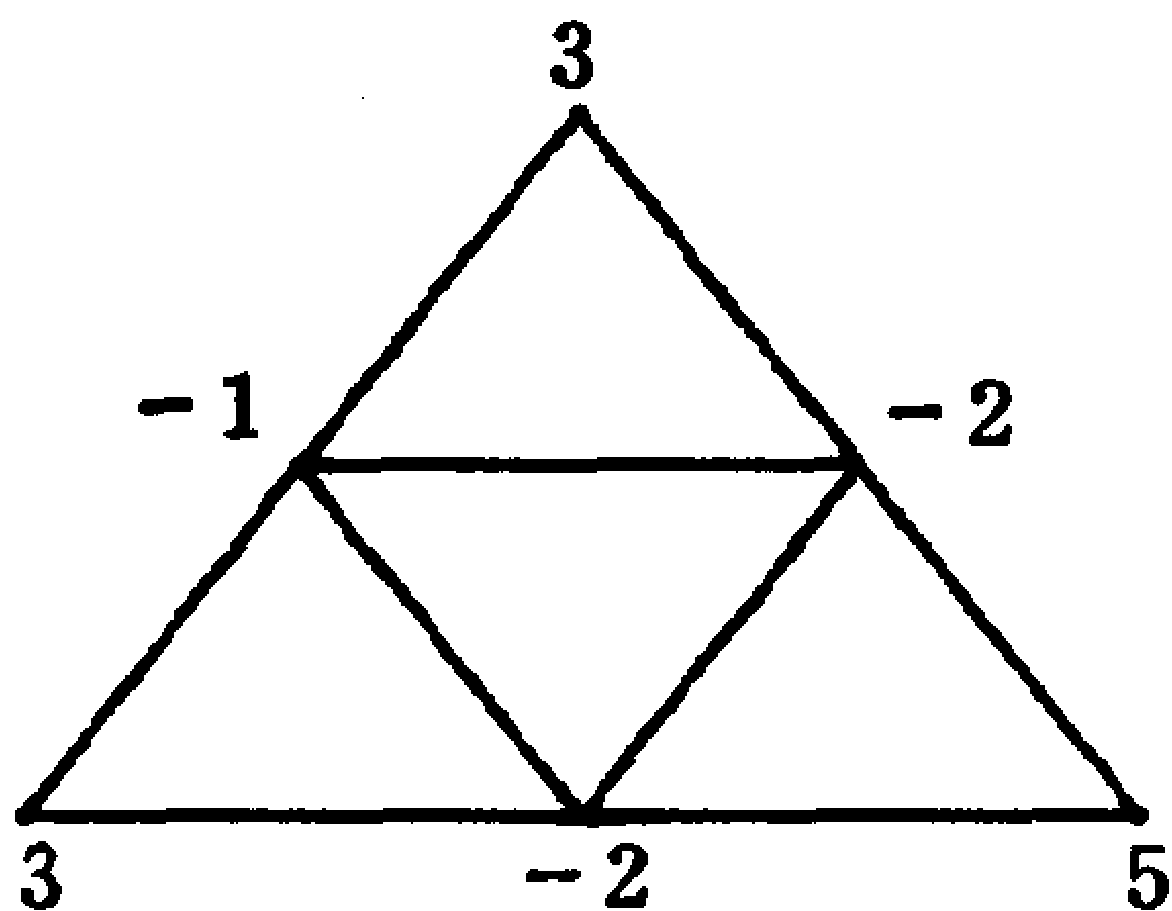


图 7.2

所确定的二次曲面在 $\mathscr{T}$ 上是正的.

条件 (2) 虽然十分便于检验，可惜的是它也只是一个充分条件，并不必要，何况还只是对 a，b，c 同时为负时才能适用.

现在我们讨论最一般的数据（图 7.1）所定义的二次曲面，求出它在 $\mathscr{T}$ 上为正的必要且充分的条件.

首先，由于曲面三条边界曲线的每一条是二次 Bernstein 多项式，例如说，当 $u_1=0$ 时，对应的边界为

$$B^2(0,u_2,1-u_2)=C(1-u_2)^2+2au_2(1-u_2)+Bu_2^2,$$

$u_2\in[0,1]$. 根据定理 2.1，这条边界是正的当且只当

$$B\geqslant 0,\quad C\geqslant 0,\quad a+\sqrt{BC}\geqslant 0.$$

因此，为了曲面的三条边界都是正的，必需而且只需

$$\left.\begin{array}{l} A\geqslant 0,\quad B\geqslant 0,\quad C\geqslant 0. \\ a+\sqrt{BC}\geqslant 0, b+\sqrt{CA}\geqslant 0, c+\sqrt{AB}\geqslant 0. \end{array}\right\}(3)$$

为了使得整个曲面是正的，看看除 (3) 之外还应当加上什么条件？

设座标三角形 $\mathscr{T}$ 的顶点为 T_1，T_2，T_3. 在边$\overline{T_2T_3}$上任取一点 $(0, u_2, u_3)$，其中 $u_2+u_3=1$. 把这一点与 $\mathscr{T}$ 的顶点 T_1 用线段连起来. 这线段上的点的面积座标是

$$\begin{aligned}&(1-t)(1,0,0)+t(0,u_2,u_3)=\\ &\quad(1-t,tu_2,tu_3),\qquad 0\leqslant t\leqslant 1,\end{aligned}$$

见图 7.3.

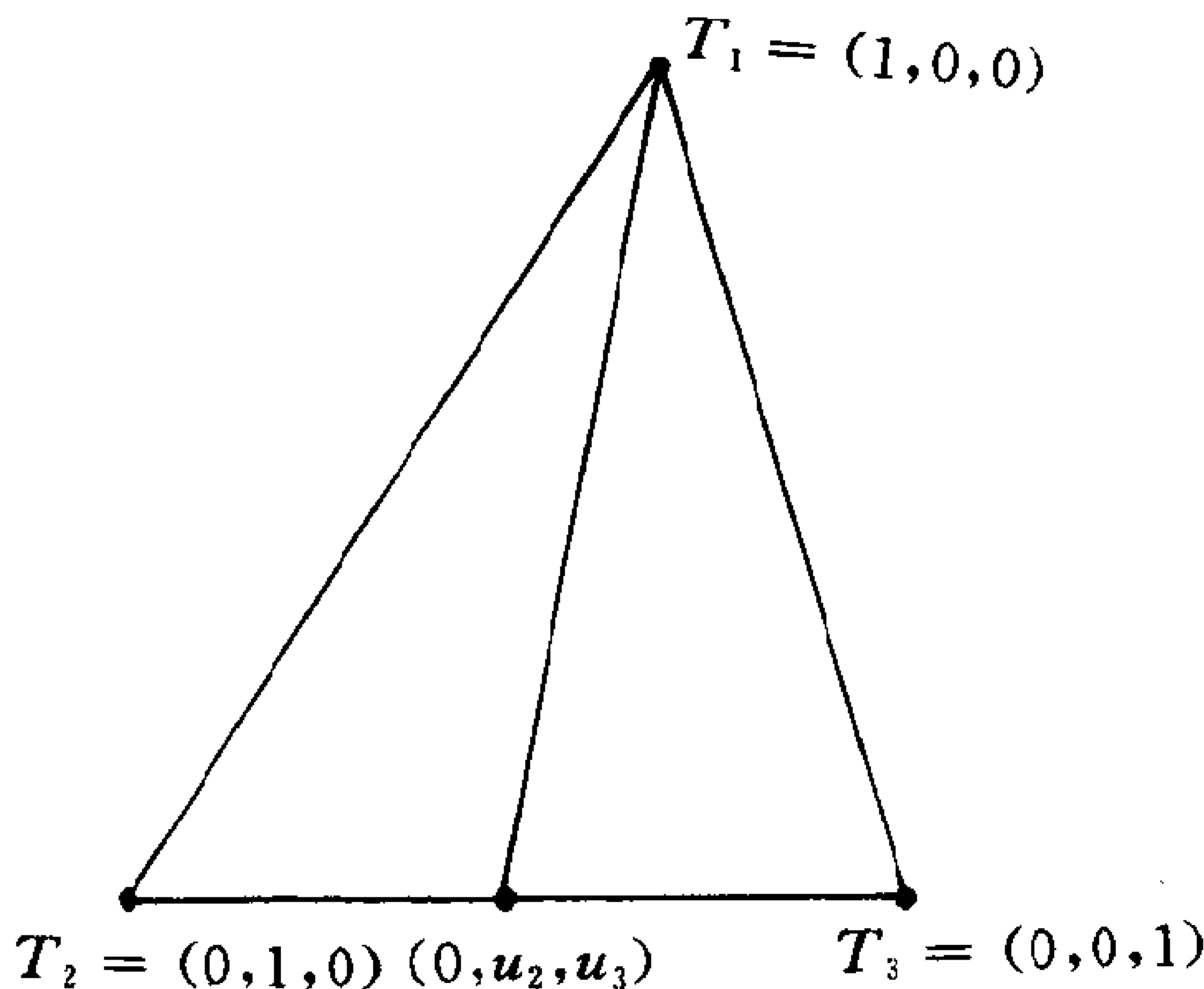


图 7.3

把二次曲面限制在这线段上，得到一条曲线，其方程是

$$(1-t,tu_2,tu_3)\begin{pmatrix} A & c & b \\ c & B & a \\ b & a & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-t \\ tu_2 \\ tu_3 \end{pmatrix},$$

展开上式，得

$$A(1-t)^2+2(bu_3+cu_2)t(1-t)+(Bu_2^2+2au_2u_3+Cu_3^2)t^2. \tag{4}$$

二次曲面的正性等价于所有这样的限制曲线的正性，即表达式 (4) 对 $t\in[0,1]$ 及 $u_2+u_3=1$ 的正性. 由于 (4) 可看成是 t 的二次 Bernstein 多项式，按定理 2.1，(4)有正性的必要充分条件是

$$\left.\begin{aligned} &A\geqslant 0, \\ &Bu_2^2+2au_2u_3+Cu_3^2\geqslant 0 \\ &bu_3+cu_2+\sqrt{A(Bu_2^2+2au_2u_3+Cu_3^2)}\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

但是 (5) 中的第二式又相当于

$$B\geqslant 0,C\geqslant 0,a+\sqrt{BC}\geqslant 0,$$

而这已被包括在必要条件(3)之内，因此只需进一步讨论 (5) 中最后那个不等式.

如果 $b\geqslant 0$，$c\geqslant 0$ 同时成立，则对一切 $u_2,u_3\in[0,1]$ 有 $bu_3+cu_2\geqslant 0$，那么 (5) 中的最后一式自动地被满足. 三数 a，b，c 中至多有一个为负数的情形均属于此类.

如果 $b<0$，$c<0$ 同时成立，那么恒有 $bu_3+cu_2<0$，因此 (5) 中的第三式相当于

$$A(Bu_2^2+2au_2u_3+Cu_3^2)\geqslant(bu_3+cu_2)^2$$

将上式化简，得出

$$(AB-c^2)u_2^2+2(Aa-bc)u_2u_3+(AC-b^2)u_3^2\geqslant 0. \tag{6}$$

又一次利用定理 2.1，知(6)等价于

$$\left.\begin{aligned}&AB-c^2\geqslant 0,\\&AC-b^2\geqslant 0,\\&Aa-bc+\sqrt{(AB-c^2)(AC-b^2)}\geqslant 0.\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

由于 b，$c<0$，故 $\sqrt{AB}-c>0$，$\sqrt{AC}-b>0$，利用(3)可知

$$AB-c^2=(\sqrt{AB}+c)(\sqrt{AB}-c)\geqslant 0,$$

$$AC-b^2=(\sqrt{AC}+b)(\sqrt{AC}-b)\geqslant 0.$$

这表明，(7) 中第一、第二式已自动地被满足，余下来只须进一步地讨论(7)中的最后一式.

现在来讨论 $Aa-bc$ 的符号. 如果 $Aa-bc\geqslant 0$，那么(7)中第三式自动地被满足，这时(7)式全部被满足，因此(3)式成立，即表明曲面是正的.

设 $Aa-bc<0$，这时 (7) 中的最后一式相当于

$$(AB-c^2)(AC-b^2)\geqslant (Aa-bc)^2,$$

化简上式，得到

$$A(ABC+2abc-Aa^2-Bb^2-Cc^2)\geqslant 0.\qquad(8)$$

由 $b<0$ 及 $\sqrt{AC}+b\geqslant 0$ 可知必有 $A>0$，从而 (8) 变为

$$ABC+2abc-Aa^2-Bb^2-Cc^2\geqslant 0.$$

利用三阶行列式，上式可以写为

$$\begin{vmatrix}A & c & b\\ c & B & a\\ b & a & C\end{vmatrix}\geqslant 0.\qquad(9)$$

到此为止，我们已经讨论了所有的情况. 也就是说，任意给定一个二次三角曲面的 6 个 Bernstein 系数，通过计算，总可以判断这张曲面是不是正的. 这里，我们来总结一下判断的步骤：

第一步，检查下列 6 个不等式是否被满足：

$$\left.\begin{array}{l}A \geqslant 0,\ B \geqslant 0,\ C \geqslant 0, \\ \sqrt{BC}+a \geqslant 0,\ \sqrt{CA}+b \geqslant 0,\ \sqrt{AB}+c \geqslant 0\end{array}\right\} \quad (10)$$

如果其中至少有一个不被满足，曲面就没有正性；只有在(10)得到满足时，才有必要进行下一步.

第二步，如果 a，b，c 中有二个或者三个数是非负的，立刻可以断言曲面是正的.

如果 a，b，c 中至少有二个是负数，例如说 b，c 是负的. 这时必须进一步考察 $Aa-bc$ 的符号. 如果 $Aa-bc\geqslant 0$，则曲面是正的；如果 $Aa-bc<0$ 则当且仅当(9)成立时曲面才是正的，特别地，当 a，b，c 全为负数时，曲面有正性的必要充分条件是(10)与(9)同时成立.

§2　三阶 copositive 矩阵

有趣的是，§1 中关于二次三角曲面的正性的研究，同代数中所谓 copositive 矩阵的研究有着密切的关系.

三阶实系数对称方阵

$$K:=\begin{pmatrix}A & c & b \\ c & B & a \\ b & a & C\end{pmatrix} \quad (11)$$

叫做 **copositive 矩阵**，是指对一切具有非负元素的向量 $x^T=(x_1,x_2,x_3)$，二次型

$$x^TKx \geqslant 0, \quad (12)$$

这里 $\boldsymbol{x}^T$ 表示列向量 $\boldsymbol{x}$ 的转置.

很明白，K 是 copositive 矩阵当且仅当由 K 所作成的二次三角曲面是正的.

人们希望通过 K 的系数来提出 K 为 copositive 矩阵的必要充分条件，下面的定理就是这样一个例子.

定理 7.2 （[Hadeler'83]） 三阶对称方阵(11)为 copositive 矩阵的必要充分条件是

Ⅰ $\quad A\geqslant 0,\quad B\geqslant 0,\quad C\geqslant 0,$

$$a+\sqrt{BC}\geqslant 0, b+\sqrt{CA}\geqslant 0, c+\sqrt{AB}\geqslant 0$$

以及下面二个不等式

Ⅱ$_a$ $\quad \sqrt{ABC}+a\sqrt{A}+b\sqrt{B}+c\sqrt{C}\geqslant 0,$

Ⅱ$_b$ $\quad \det K\geqslant 0$

中至少有一个成立，这里 $\det K$ 表示 K 的行列式.

证明 回顾 §1 中的讨论，我们可以很容易地证明本定理.

必要性. 设 K 为 copositive 矩阵，那么它所确定的二次三角曲面必是正的，因此(10)必需被满足，即 Ⅰ 是必要的，当 a, b, c 有二个或三个为非负时，不失一般性，可设 $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$. 于是

$$\sqrt{ABC}+a\sqrt{A}+b\sqrt{B}+c\sqrt{C}$$
$$=\sqrt{A}(\sqrt{BC}+a)+b\sqrt{B}+c\sqrt{C}\geqslant 0.$$

再设 $b<0$, $c<0$ 且 $Aa-bc\geqslant 0$，此时可以推出

$$Aa+A\sqrt{BC}+b\sqrt{AB}+c\sqrt{AC}$$
$$\geqslant (b+\sqrt{AC})(c+\sqrt{AB})\geqslant 0,$$

用 $A^{-1/2}>0$ 乘上述不等式，得到

$$\sqrt{ABC}+a\sqrt{A}+b\sqrt{B}+c\sqrt{C}\geqslant 0,$$

以上二种情况说明 Ⅱ$_a$ 成立.

最后设 $b<0, c<0$ 且 $Aa-bc<0$，这时按照 §1 可知 (9) 成立，亦即 Ⅱ$_b$ 成立.

充分性. 设 Ⅰ 成立且 Ⅱ$_a$ 与 Ⅱ$_b$ 中至少有一个不等式成立.

只须讨论 a,b,c 中有两个或三个负数的情形. 先设 Ⅰ 与 $Ⅱ_b$ 成立，从 § 1 的讨论可知这时可推出 K 是 copositive 矩阵.

设 Ⅰ 成立、$Ⅱ_b$ 不成立但 $Ⅱ_a$ 成立，无妨设 $b<0$，$c<0$. 此时 $Ⅱ_a$ 等价于

$$(\sqrt{ABC}+a\sqrt{A})^2\geqslant(b\sqrt{B}+c\sqrt{C})^2$$

亦即

$$ABC+Aa^2-Bb^2-Cc^2+2aA\sqrt{BC}-2bc\sqrt{BC}\geqslant 0, \tag{13}$$

$Ⅱ_b$ 不成立则是

$$Aa^2+Bb^2+Cc^2-ABC-2abc>0, \tag{14}$$

将（13）与（14）双方相加，得到

$$2(a^2A-abc+aA\sqrt{BC}-bc\sqrt{BC})>0,$$

分解因式得

$$2(Aa-bc)(\sqrt{BC}+a)>0,$$

由此可知 $Aa-bc>0$，按 § 1 中的推理知此时对应的三角曲面是正的，从而 K 是 copositive 矩阵.

证毕.

§ 3　高阶 copositive 矩阵

考虑 n 阶实对称方阵

$$A:=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

其中 $a_{ij}=a_{ji}$，i，$j=1$，2，…，n，如果对于任何具有非负系数

的 n 维行向量 $x^T := (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，二次型 x^TAx 总是非负的，则称 A 为 n 阶 copositive 矩阵.

自从 Motzkin 在 1953 年引入 copositive 矩阵的概念以来，有大量的研究工作延伸到以下几个方面：copositive 矩阵的刻划；对于二次规划的应用；有关的组合问题；以及对无限维空间的拓展. 但是，如何确定一个给定的实对称矩阵是不是 copositive矩阵，仍旧是一个困难的问题. 对于二阶与三阶的 copositive 矩阵，已经有了判别的条件. 例如说，定理 2.1 可以用矩阵语言表述为：二阶实对称矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

为 copositive 矩阵的必要充分条件是

$$a_{11} \geqslant 0, a_{22} \geqslant 0, a_{12} + \sqrt{a_{11}a_{22}} \geqslant 0.$$

而对三阶 copositive 矩阵，则可用 Hadeler 的定理来刻划.

[Micchelli & Pinkus'89] 指出：n 阶对称矩阵的 copositive 性质等价于 $n-1$ 维单纯形上的 Bernstein-Bézier 曲面的正性. 由于这一关联，再通过 Bézier 曲面的一些常用技巧，李平与冯玉瑜（见 [Li & Feng'93]）得到了找出全部四阶 copositive 矩阵的方法.

接着，瑞典的两位数学家 Andersson，Elfving 与常庚哲对 5 阶矩阵作了类似的工作. 1994 年，常庚哲对 6 阶矩阵又得出了相应的结果.

虽然 Andersson 等人的方法可以用来解决 $n=5$ 甚至 $n=6$ 的问题，但是为了不使复杂的记号搅乱了本来很简单的思想，这里还是用他们的方法来解决 $n=4$ 时的问题，这对于说明思路来说已经是足够了.

粗略地说，直线上的线段是一维单形，平面上的三角形是二维单形，空间中的四面体是三维单形，如此等等.

设空间中有一个四面体，其顶点用 T_0, T_1, T_2, T_3 来表示，用 $\mathscr{T}$ 来表示这个四面体，即令 $\mathscr{T}=T_0T_1T_2T_3$（图 7.4）.

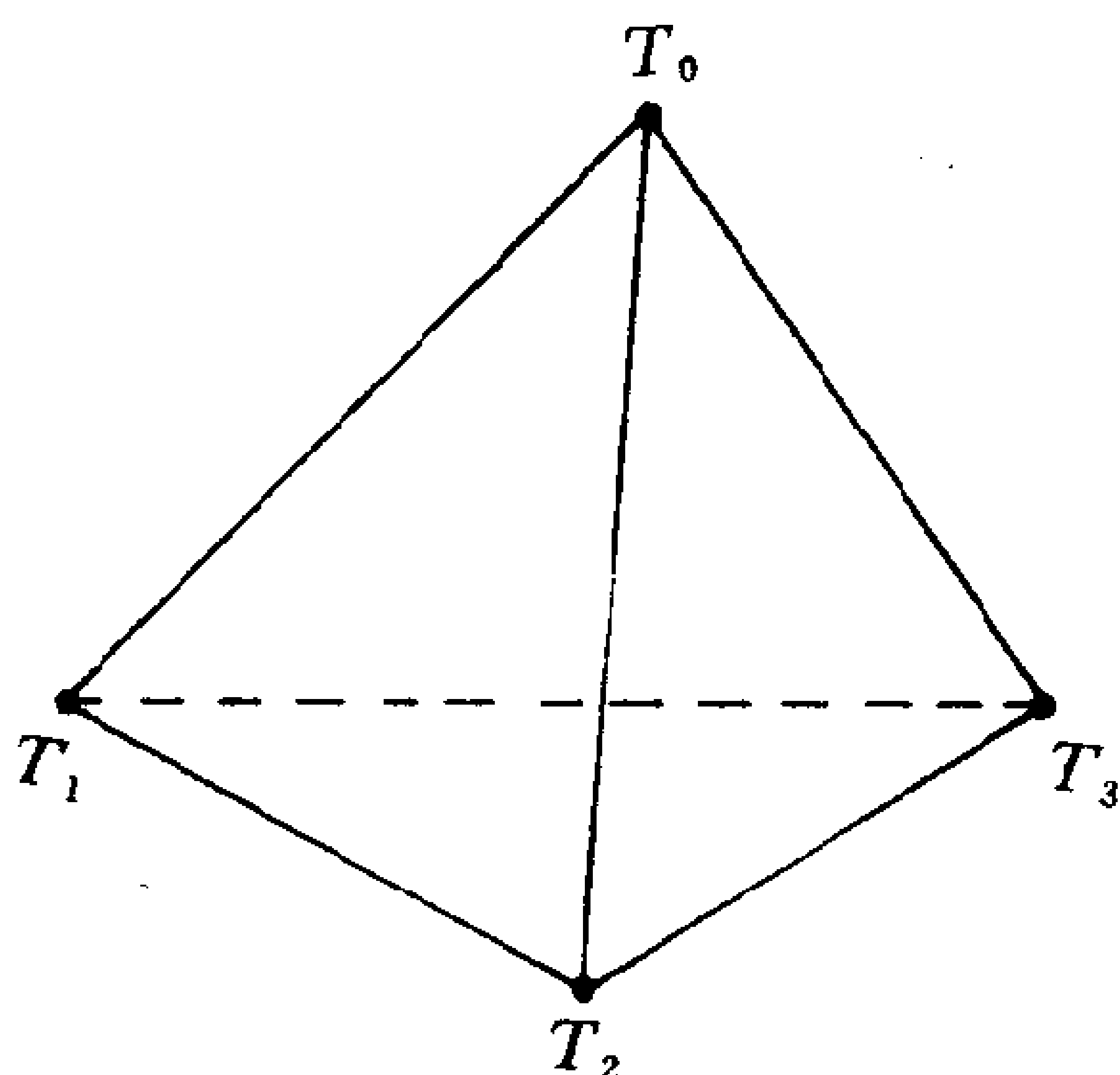


图 7.4 四面体

仿照对三角形建立的面积座标的概念，对于四面体 $\mathscr{T}$，可以定义"体积座标". 设 P 为四面体 $\mathscr{T}$ 内的任一点，可以唯一地将 P 表示为

$$P=(u_0, u_1, u_2, u_3),$$

其中 $u_i \geqslant 0 (i=0,1,2,3)$ 且 $u_0+u_1+u_2+u_3=1$，特别地，4 个顶点的体积座标是

$$T_0=(1,0,0,0), \quad T_1=(0,1,0,0),$$
$$T_2=(0,0,1,0), \quad T_3=(0,0,0,1).$$

如果 P 落在三角形 $T_1T_2T_3$ 上，那么 $P=(0,u_1,u_2,u_3)$，这时 $u_1+u_2+u_3=1$. 设

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{16}$$

是一个 4 阶实对称矩阵，我们称

$$(u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3)A_0\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \tag{17}$$

是定义在 $\mathscr{T}$ 上的二次 Bézier “三角曲面”.

显然，A_0 是 copositive 矩阵必须且只须二次曲面（17）在 $\mathscr{T}$ 上是正的.

自 T_0 出发向底面 $T_1T_2T_3$ 上的任一点引一条线段，这线段上的任一点 P 的体积座标是

$$\begin{aligned} P &= (1-t)(1,0,0,0) + t(0,u_1,u_2,u_3) \\ &= (1-t, tu_1, tu_2, tu_3), \end{aligned} \tag{18}$$

其中 $0 \leqslant t \leqslant 1$，$u_1$，$u_2$，$u_3 \geqslant 0$ 且 $u_1+u_2+u_3=1$. 曲面（17）的正性相当于它在（18）右边的每一点 P 上是正的，即

$$(1-t, tu_1, tu_2, tu_3)A_0\begin{pmatrix} 1-t \\ tu_1 \\ tu_2 \\ tu_3 \end{pmatrix} \geqslant 0. \tag{19}$$

展开上式左边，得到

$$a_{00}(1-t)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{3} a_{0i}u_i\right)t(1-t) + (u_1, u_2, u_3)A\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_2 \end{pmatrix}t^2 \geqslant 0, \tag{20}$$

其中

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

依定理 2.1，为了使(20)成立，必须且只须

$a_{00} \geqslant 0$,

A 是三阶 copositive 矩阵，

$$\sqrt{a_{00}(u_1, u_2, u_3) A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}} + \varphi \geqslant 0, \tag{21}$$

其中 φ 是 u_1，u_2，u_3 的线性函数：

$$\varphi := a_{01}u_1 + a_{02}u_2 + a_{03}u_3, \tag{22}$$

即 φ 是定义在三角形 $T_1T_2T_3$ 上的一张平面.

现在，按照 φ 的三个系数的符号进行讨论.

1° 如果这三个系数全是非负的，那么在 $T_1T_2T_3$ 上 $\varphi \geqslant 0$，(21)被自动满足. 这时：$a_{00} \geqslant 0$ 以及三阶矩阵 A 为 copositive 矩阵，即为四阶矩阵 A_0 是 copositive 矩阵的必要充分条件.

2° 如果这三个系数中恰有一个取负值，不失一般性可设 $a_{01} < 0$. 这时 φ 在 T_1 处取负值，在 T_2，T_3 上取非负的值. φ 在线段 T_1T_2 与 T_1T_3 上分别有唯一的零点，记为 Q_2，Q_3. 易见 φ 在三角形 $T_1Q_2Q_3$ 内取负值，而在四边形 $Q_2T_2T_3Q_3$ 上取非负的值(见图 7.5). 若采取 $T_1T_2T_3$ 为座标三角形，Q_2 与 Q_3 的面积座标是

$$Q_2 = \left(\frac{a_{02}}{a_{02} - a_{01}}, \frac{-a_{01}}{a_{02} - a_{01}}, 0 \right),$$

$$Q_3 = \left(\frac{a_{03}}{a_{03} - a_{01}}, 0, \frac{-a_{01}}{a_{03} - a_{01}} \right).$$

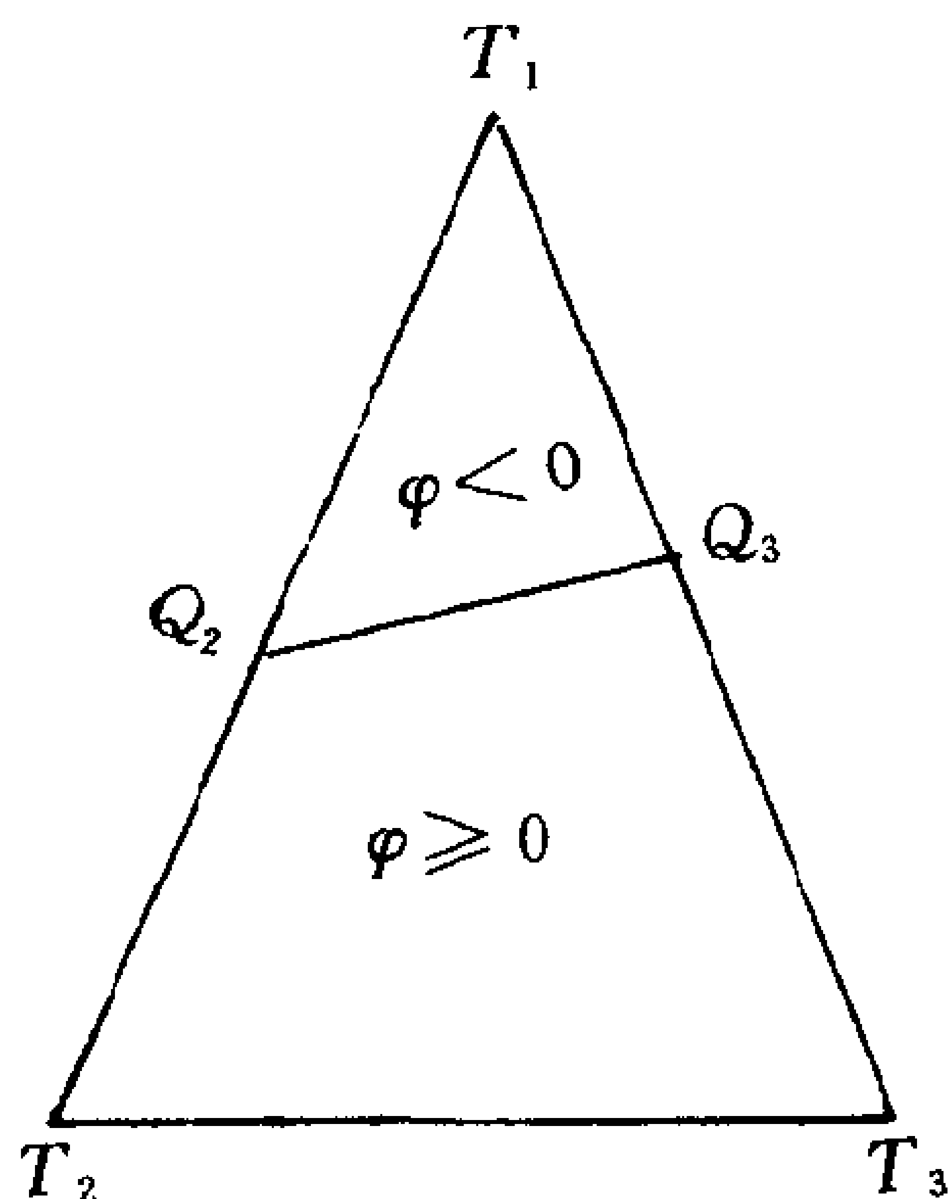


图 7.5

注意：在 $\varphi\geqslant 0$ 的区域上，不等式（21）自动地被满足，因此只需在 $\varphi<0$ 的区域上（在目前，即在三角形 $T_1Q_2Q_3$ 上）来讨论(21)．将（21）中的 φ 移到不等式的右边，然后双方作平方，便发现(21)等价于

$$u^T Bu\geqslant 0 \tag{23}$$

在使 $\varphi<0$ 的区域上成立，其中 $u^T=(u_1,u_2,u_3)$，

$$B:=a_{00}A-\begin{pmatrix}a_{01}\\a_{02}\\a_{03}\end{pmatrix}(a_{01}\quad a_{02}\quad a_{03}). \tag{24}$$

现在，我们取 $T_1Q_2Q_3$ 为座标三角形．按照面积座标的座标变换公式（第五章公式(9)），有

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{a_{02}}{a_{02}-a_{01}} & \dfrac{a_{03}}{a_{03}-a_{01}} \\ 0 & \dfrac{-a_{01}}{a_{02}-a_{01}} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-a_{01}}{a_{03}-a_{01}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

其中 (v_1,v_2,v_3) 表示点关于座标三角形 $T_1Q_2Q_3$ 的面积座标. 我们可将(25) 写为

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{02} & a_{03} \\ 0 & -a_{01} & 0 \\ 0 & 0 & -a_{01} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a_{02}-a_{01}} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{a_{03}-a_{01}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

将上式右边的两个三阶方阵依次记为 Z, D, 故 (23) 变为

$$v^T DZ^T BZDv \geqslant 0, \tag{26}$$

这里 $v=(v_1,v_2,v_3)$ 只受 $v_i \geqslant 0(i=1,2,3)$ 及 $v_1+v_2+v_3=1$ 的限制. 从而(26) 可以说成:三阶矩阵 DZ^TBZD 是 copositive 矩阵. 注意到 D 是主对角元为正数的对角矩阵,DZ^TBZD 为 copositive 矩阵的必要充分条件是 Z^TBZ 为 copositive 矩阵.

总而言之,在这种条件下,四阶矩阵 A_0 是 copositive 矩阵的必要充分条件是:

$a_{00} \geqslant 0$,三阶矩阵 A 及 Z^TBZ 均为 copositive 矩阵,其中 B 由 (24) 给出, 且

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & a_{02} & a_{03} \\ 0 & -a_{01} & 0 \\ 0 & 0 & -a_{01} \end{pmatrix}. \tag{27}$$

3° 如果这三个系数中恰有两个负值，不妨设 $a_{01}\geqslant 0$，$a_{02}<0$，$a_{03}<0$.

仿照 2°的作法，求出 φ 的两个零点 Q_2，Q_3. 此处不同的是：使 $\varphi<0$ 的区域是四边形 $Q_2T_2T_3Q_3$（图 7.6）. 联结线段 Q_2T_3（或 T_2O_3）将此四边形分成两个三角形，依次把座标三角形取在 $Q_2T_2T_3$ 与 $Q_2T_3Q_3$ 上. 根据与 2°相同的讨论可知，这时四阶矩阵 A_0 为 copositive 矩阵必须而且只须 $a_{00}\geqslant 0$ 以及 A 和其他两个三阶矩阵都是 copositive 矩阵.

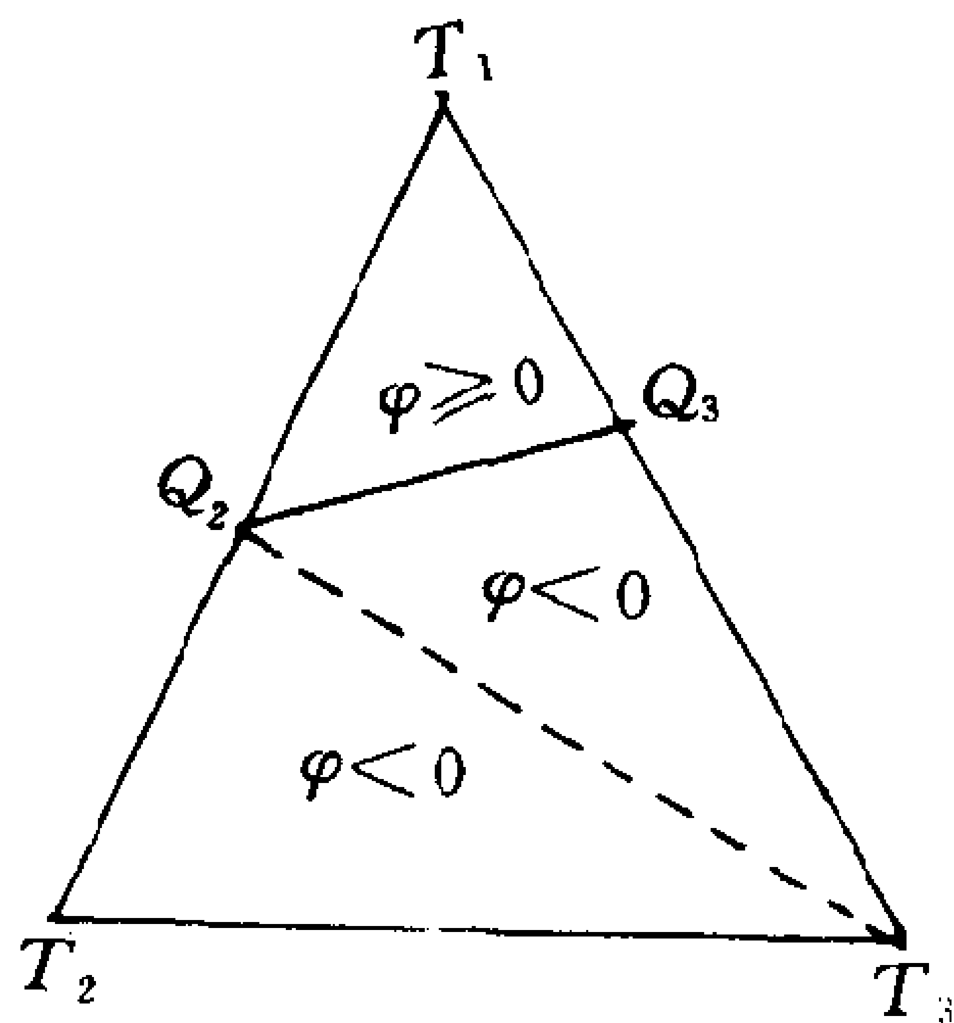


图 7.6

4° 如果三个系数都是负数，这时 $\varphi<0$ 的区域就是三角形 $T_1T_2T_3$ 全部. 显然，四阶矩阵 A_0 是 copositive 矩阵的必要充分条件是 $a_{00}\geqslant 0$ 以及 A，B（由 (24) 所定义）两个三阶矩阵是 copositive 矩阵.

最后举一个数值例子. 考虑 4 阶方阵

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

由于第 4 行中只有一个负数，这建议我们把第 1 行与第 4 行对调，接着把第 1 列与第 4 列对调，得到矩阵

$$A_0 := \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

矩阵 A_0 与原矩阵同时是或者同时不是 copositive 矩阵. 这里 $a_{00} = 4 > 0$,

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A 符合定理 7.2 中的条件 Ⅰ 与 $Ⅱ_a$，所以 A 是 copositive 矩阵. 按（24），有

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 11 & -2 \\ 11 & 3 & -6 \\ -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

再按（27），得

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

于是

$$Z^T B Z = \begin{pmatrix} 3 & 36 & 0 \\ 36 & 96 & 12 \\ 0 & 12 & 24 \end{pmatrix},$$

由于其中所有元素非负，它显然是一个 copositive 矩阵. 这说明 A_0 是 copositive 矩阵，从而原矩阵也是一个 copositive 矩阵.

§4 结束语

Bézier 三角曲面的正性有许多的应用，我们在下一章中将

看到，三角曲面的凸性的讨论最终归结为讨论另外一些三角曲面的正性，我们力图通过其 Bernstein 系数来表达三角曲面的正性. 使得 Bézier 三角曲面为正的充分条件可以举出很多，但是最理想的还是由其 Bernstein 系数表示的既充分又必要的条件. 遗憾的是，即使对于三次的 Bézier 三角曲面，目前还未见到这种条件.

二次的 Bézier 三角曲面的正性的充要条件已经出现(见定理 7.2). 不仅如此，对于高维单纯形（例如 3，4，5 维单形），我们已有确定的算法来判断一张二次曲面是不是正的.

高维单形上的二次 Bézier 曲面的正性与 copositive 矩阵有着密切的联系. 在本章中我们已经看到，CAGD 中的某些技巧可以用来讨论 copositive 矩阵，并且取得了初步的结果. 这是一件令人鼓舞的事，这是又一个例证，它说明数学的不同分枝之间，本来是互相关联、互相渗透的.

第八章　Bézier 三角曲面的凸性

本章的核心的定理是定理 8.4，它说的是“如果 B-网是凸的，那么对应的 Bézier 三角曲面也是凸的”，以及这个定理的推广. 我们将给出定理 8.4 的两种证明，第一种证明须用到“方向导数”的概念. 利用方向导数，还可以讨论两张三角曲面的连续拼接的问题. 最后讨论两张三角曲面连续保凸拼接的可能性.

§1　方向导数

设 F 是三角形 $\mathscr{T}$ 上的一个函数. 在 $\mathscr{T}$ 上建立了面积座标系之后，F 可以用 $F(u_1,u_2,u_3)$ 来表示. 函数 F 不限于是 u_1,u_2,u_3 的多项式，它可以是面积座标 (u_1,u_2,u_3) 的很一般的函数，但是要求它在 $\mathscr{T}$ 上是二阶连续可微的. 点集 $(u_1,u_2,u_3;F(u_1,u_2,u_3))$，$P=(u_1,u_2,u_3)\in\mathscr{T}$，是 $\mathscr{T}$ 上的一张很一般的曲面，我们简称它为曲面 F.

很明显的是，F 在 $\mathscr{T}$ 上是凸的当且仅当将 F 限制在 $\mathscr{T}$ 上

的任意直线段上得到的是凸的曲线，这可以很容易地从凸函数的定义（第六章公式(3)）看出.

设 $P_0=(u_1^0,u_2^0,u_3^0)$ 与 $P_1=(u_1^1,u_2^1,u_3^1)$ 是 $\mathscr{T}$ 上的任何二点(图 8.1)，那么线段 $\overline{P_0P_1}$ 上的点的面积座标是

$$((1-t)u_1^0+tu_1^1,(1-t)u_2^0+tu_2^1,(1-t)u_3^0+tu_3^1), \quad (1)$$

$0\leqslant t\leqslant 1$. 将曲面 F 局限在线段 $\overline{P_0P_1}$ 上，得到曲线

$$F((1-t)u_1^0+tu_1^1,(1-t)u_2^0+tu_2^1,(1-t)u_3^0+tu_3^1), \quad (2)$$

其中 $t\in[0,1]$，所以(2)是单变量 t 的函数. 这一段曲线的凸性，便可以通过(2)对 t 的二阶微商的正性来刻划.

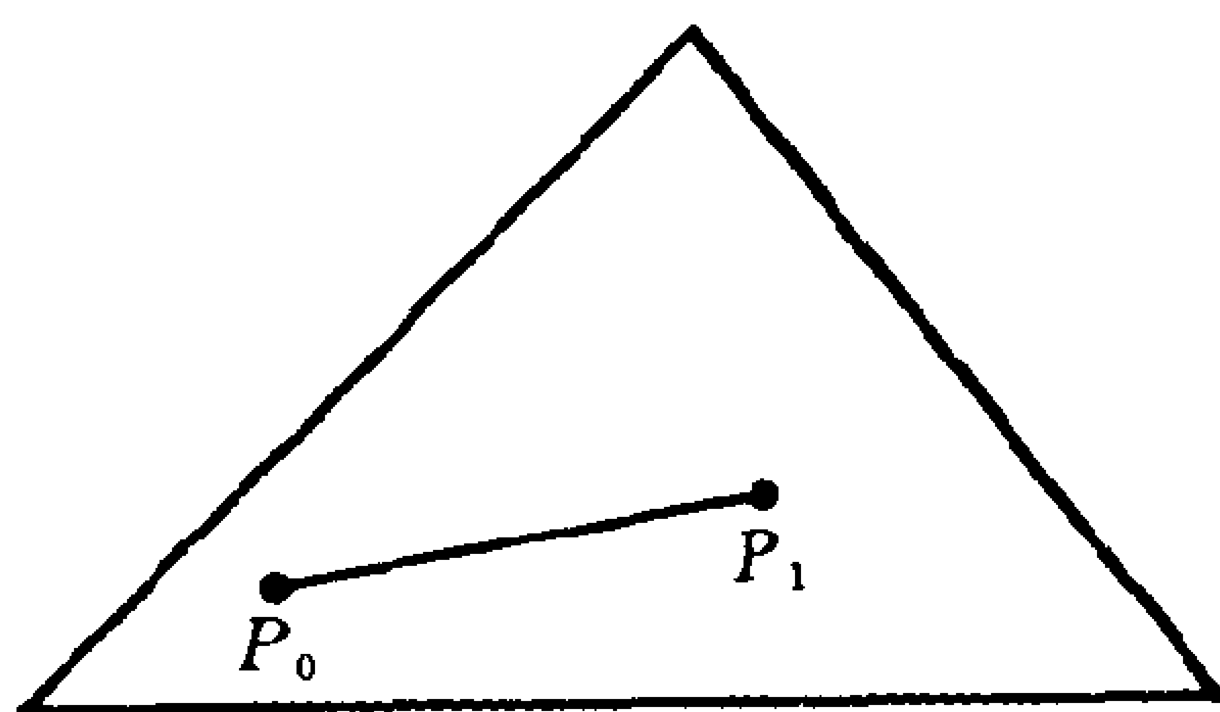


图 8.1　三角形内的线段

将 (2) 对 t 求一阶导数，利用链式法则得到

$$(u_1^1-u_1^0)\frac{\partial F}{\partial u_1}+(u_2^1-u_2^0)\frac{\partial F}{\partial u_2}+(u_3^1-u_3^0)\frac{\partial F}{\partial u_3}, \quad (3)$$

其中的三个偏导数均在点 (1) 上取值. 为方便计，令

$$\xi_i:=u_i^1-u_i^0,\ i=1,\ 2,\ 3. \quad (4)$$

再将 (3) 对 t 求一次微商，便获得函数 (2) 关于自变数 t 的二阶微商：

$$(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2F}{\partial u_1^2} & \dfrac{\partial^2F}{\partial u_1\partial u_2} & \dfrac{\partial^2F}{\partial u_1\partial u_3}\\ \dfrac{\partial^2F}{\partial u_1\partial u_2} & \dfrac{\partial^2F}{\partial u_2^2} & \dfrac{\partial^2F}{\partial u_2\partial u_3}\\ \dfrac{\partial^2F}{\partial u_1\partial u_3} & \dfrac{\partial^2F}{\partial u_2\partial u_3} & \dfrac{\partial^2F}{\partial u_3^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}, \quad (5)$$

上式中的 3×3 矩阵称为 F 的 **Hessian 矩阵**，简记为 $H(F)$，其中的 6 个偏导数均在点(1)上取值. 由于(4)可以看出

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3=0. \tag{6}$$

表达式(3)与(5)分别称为函数 F 关于方向$\overline{P_0P_1}$的一阶与二阶**方向导数**. 适合(6)的三数组 (ξ_1,ξ_2,ξ_3) 实际上代表一个“方向”，也就是说，如果两点 Q_0 与 Q_1 所决定的线段$\overline{Q_0Q_1}$与$\overline{P_0P_1}$平行，Q_1 与 Q_0 的面积座标之差产生的数组记为(η_1,η_2,η_3)，那么容易证明：两个三数组(ξ_1,ξ_2,ξ_3)与(η_1,η_2,η_3)成比例.

因此得出

定理 8.1 曲面 F 在 $\mathscr{T}$ 上凸的必要充分条件是：对任意方向 (ξ_1,ξ_2,ξ_3)

$$(\xi_1,\xi_2,\xi_3)H(F)\big|_P\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}\geqslant 0, \tag{7}$$

其中 P 取遍三角形 $\mathscr{T}$ 的所有的点.

为了简化 (5)，我们需要下列的

引理 对任何两个三数组 (ξ_1,ξ_2,ξ_3) 与(η_1,η_2,η_3)，其中 $\xi_1+\xi_2+\xi_3=\eta_1+\eta_2+\eta_3=0$，双线性型

$$(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\begin{pmatrix}A & c & b\\ c & B & a\\ b & a & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix}$$

可以写为

$$(A+a-b-c)\xi_1\eta_1+(B+b-c-a)\xi_2\eta_2+$$
$$(C+c-a-b)\xi_3\eta_3.$$

证明 由于

$$\begin{pmatrix} A & c & b \\ c & B & a \\ b & a & C \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A+a-b-c & 0 & 0 \\ 0 & B+b-c-a & 0 \\ 0 & 0 & C+c-a-b \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} b+c-a & c & b \\ c & c+a-b & a \\ b & a & a+b-c \end{pmatrix}, \qquad (8)$$

将最后一个方阵记为 M，注意到

$$(\xi_1,\xi_2,\xi_3)M\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$$

$$= (\xi_1,\xi_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

$$= (\xi_1,\xi_2)\begin{pmatrix} c-a & c-a & c-a \\ c-b & c-b & c-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

$$= (\xi_1,\xi_2)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = (0),$$

立知结论之正确性.

利用这个引理，表达式(5)可以写为

$$D_1\xi_1^2 + D_2\xi_2^2 + D_3\xi_3^2$$

其中

$$\left.\begin{aligned} D_1 := \left(\frac{\partial}{\partial u_1} - \frac{\partial}{\partial u_2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u_1} - \frac{\partial}{\partial u_3}\right)F, \\ D_2 := \left(\frac{\partial}{\partial u_2} - \frac{\partial}{\partial u_1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u_2} - \frac{\partial}{\partial u_3}\right)F, \\ D_3 := \left(\frac{\partial}{\partial u_3} - \frac{\partial}{\partial u_1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u_3} - \frac{\partial}{\partial u_2}\right)F, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

它们都是点 $P\in\mathscr{T}$ 的函数．这样，我们可以把定理 8.1 表述为

定理 8.2 曲面 F 在 $\mathscr{T}$ 上凸的必要充分条件是：对任意方向 (ξ_1,ξ_2,ξ_3)

$$\sum_{i=1}^{3} D_i\xi_i^2 \geqslant 0 \tag{10}$$

对一切点 $P\in\mathscr{T}$ 成立．

例 1 $\mathscr{T}$ 上的函数 u_1^2，u_2^2，u_3^2 都是凸的．

解 只须考察 u_1^2，由(9)可知

$$D_1=2,\ D_2=D_3=0,$$

从而 $\Sigma D_i\xi_i^2=2\xi_1^2\geqslant 0$.

由于 $\xi_1+\xi_2+\xi_3=0$，我们可以消去其中的一个变数而留下两个独立的变数，例如 ξ_1，ξ_2．这时

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} D_i\xi_i^2 &= D_1\xi_1^2 + D_2\xi_2^2 + D_3(\xi_1+\xi_2)^2 \\ &= (D_1+D_3)\xi_1^2 + 2D_3\xi_1\xi_2 + (D_2+D_3)\xi_2^2.\end{aligned}$$

为了让最后一式对一切独立的 ξ_1，ξ_2 都不是负数，必须而且只须

$$D_1+D_3\geqslant 0,\ D_2+D_3\geqslant 0,$$

$$(D_1+D_3)(D_2+D_3)-D_3^2 = D_1D_2 + D_2D_3 + D_3D_1 \geqslant 0,$$

于是我们得到与定理 8.1 及定理 8.2 等价的

定理 8.3 曲面 F 在 $\mathscr{T}$ 上凸的必要充分条件是：

$$\left.\begin{aligned}&D_1+D_3\geqslant 0,\ D_2+D_3\geqslant 0,\\&D_1D_2+D_2D_3+D_3D_1\geqslant 0\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

对一切点 $P\in\mathscr{T}$ 成立.

定理 8.3 的优点是，它已不包含任意的方向 (ξ_1,ξ_2,ξ_3).

§2 凸的 B-网

我们已经知道，单变数的 Bernstein 算子具有保凸性；在第六章中又看到三角域上的 Bernstein 算子不具有保凸性，换言之，存在着在三角形 $\mathscr{T}$ 的上凸函数，它的 Bernstein 多项式在 $\mathscr{T}$ 上是不凸的. 因此，自然会问，对哪一些函数类，Bernstein 算子是保凸的.

为了得到某些启发，考察二次 Bézier 三角曲面

$$(u_1,u_2,u_3)\begin{pmatrix}A & c & b\\ c & B & a\\ b & a & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix},\tag{12}$$

(12)中的 3×3 矩阵中放的是曲面的 Bernstein 系数（图 8.2).

为方便起见，(12)中的 3×3 矩阵记为 K，仍将 K 按照本章(8)的方式分解为两个矩阵之和.(8)中最后一个 3×3 方阵对应着 Bernstein 系数为图 8.3.

注意到图 8.3 中每一条边中点上的数正好是这条边的两个顶点上的数的算术平均值，可知图 8.3 所确定的 B-网是一张平

面，这说明

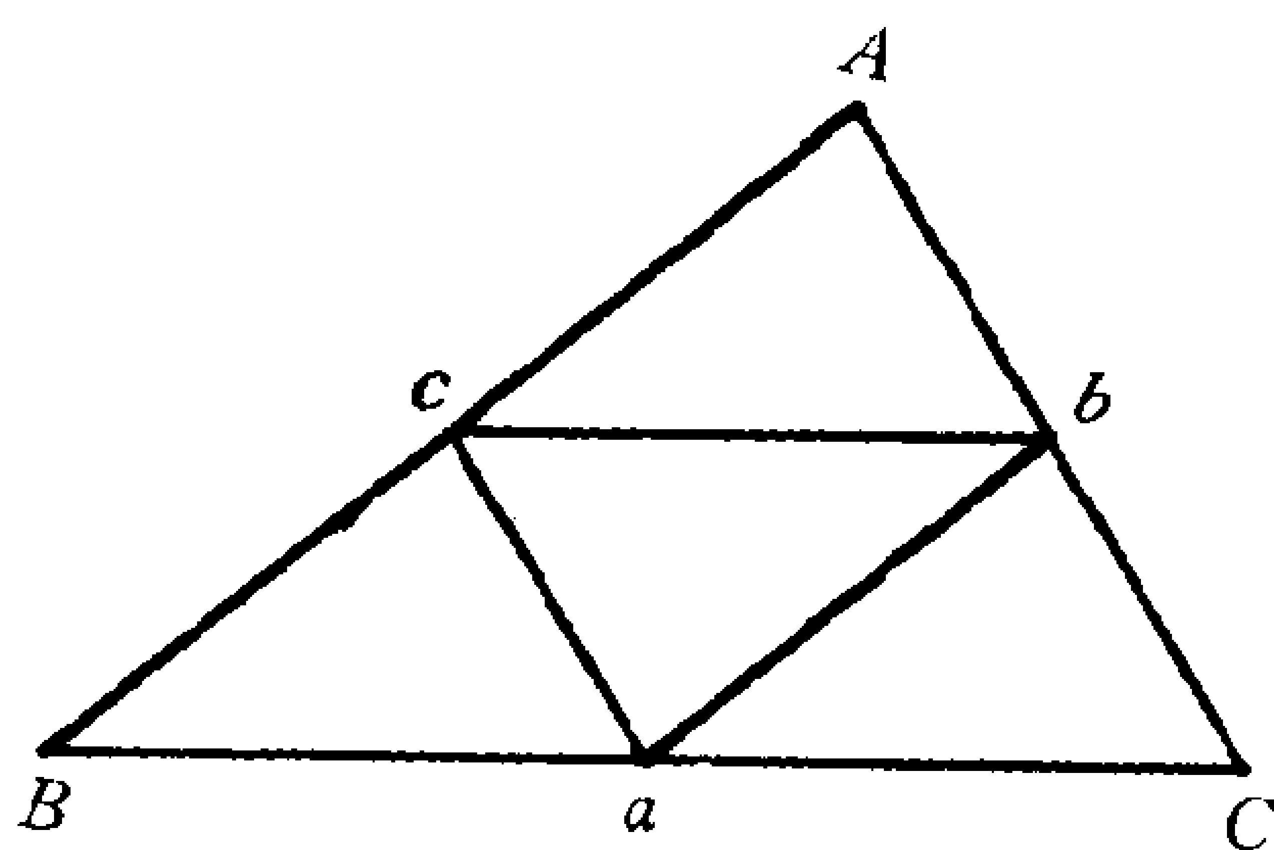


图 8.2　Bernstein 系数

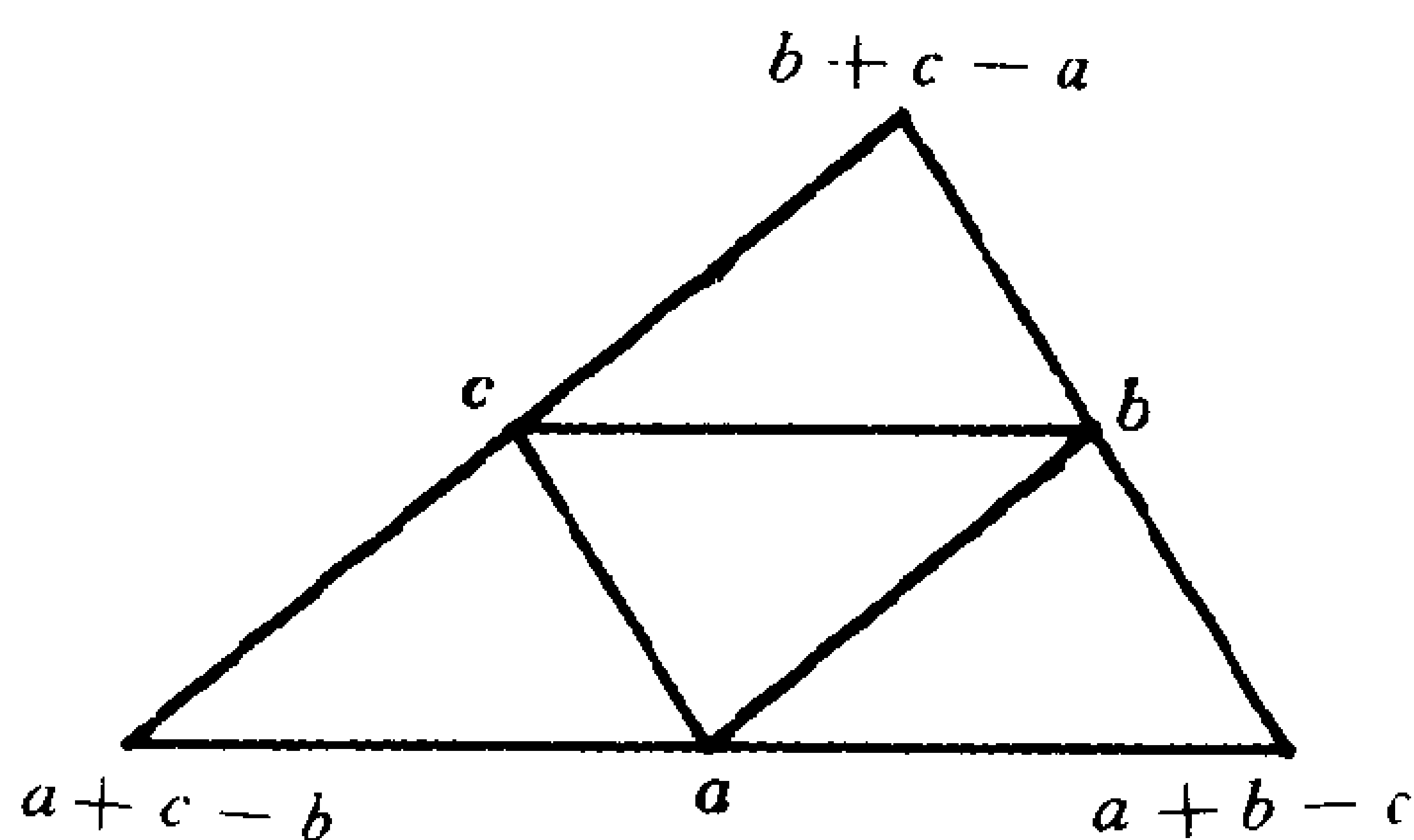


图 8.3　B-网是一张平面

$$(u_1, u_2, u_3)\begin{pmatrix} b+c-a & c & b \\ c & c+a-b & a \\ b & a & a+b-c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$= (b+c-a)u_1 + (c+a-b)u_2 + (a+b-c)u_3$$

是一个线性函数．从而有

$$(u_1, u_2, u_3)K\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = (A+a-b-c)u_1^2$$

$$+ (B+b-c-a)u_2^2$$

$$(C+c-a-b)u_3^2 + \text{一个线性函数}. \tag{13}$$

在例 1 中已证 u_1^2，u_2^2，u_3^2 都是凸函数，因此如果

$$\left.\begin{array}{l} A+a-b-c\geqslant 0, \\ B+b-c-a\geqslant 0, \\ C+c-a-b\geqslant 0, \end{array}\right\} \tag{14}$$

那么(13)的右边是四个凸函数之和，从而二次曲面(12)就是凸的曲面.

现在来说明不等式组(14)的几何意义. (14)表明，在由图 8.2 所确定的 B-网上，任何一对有着一条公共边界的三角片都是以凸的方式联接的，即(14)是二阶 B-网为凸的必要充分条件，见图 8.4.

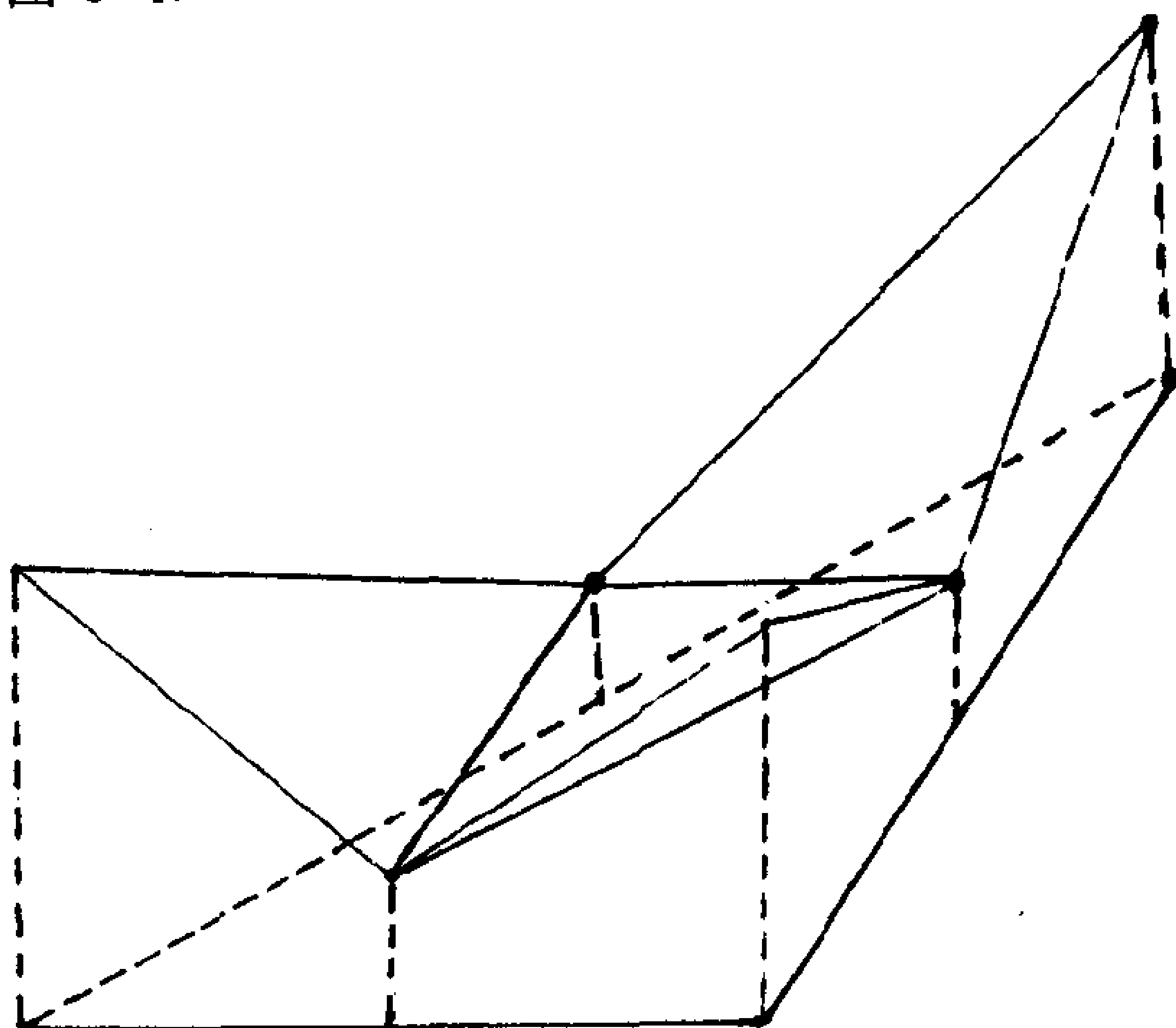


图 8.4 二阶凸 B-网

以上证明的事实可以用一句话表达为：如果二阶 B-网是凸的，则它所对应的二次 Bézier 三角曲面也是凸的. 这一事实鼓励我们来证明对于高阶 B-网也有同样的性质.

设 n 阶 B-网由其 Bernstein 系数

$$\{b_{i,j,k}: \text{非负整数 } i, j, k \text{ 适合 } i+j+k=n\}$$

所确定．这个 B-网是凸的当且仅当

$$\left.\begin{aligned}(E_1-E_2)(E_1-E_3)b_{i,j,k}\geqslant 0,\\(E_2-E_3)(E_2-E_1)b_{i,j,k}\geqslant 0,\\(E_3-E_1)(E_3-E_2)b_{i,j,k}\geqslant 0,\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

成立，其中 $i+j+k=n-2$．（15）中的不等式组一共含有 $3(n-1)n/2$ 个不等式，它们的几何意义是：在 n 阶 B-网上，任何有着一条公共边界的一对三角片以凸的方式联接．

现在，我们来证明

定理 8.4 ［常庚哲，Davis'84］如果 n 阶 B-网是凸的，那么它对应的 Bézier 三角曲面在 $\mathscr{T}$ 上是凸的．

证明 利用移位算子可将三角曲面表为

$$B^n(P)=(u_1E_1+u_2E_2+u_3E_3)^n b_{0,0,0}.$$

由此可知

$$\frac{\partial B^n}{\partial u_i}=n(u_1E_1+u_2E_2+u_3E_3)^{n-1}E_i b_{0,0,0},$$

$i=1,2,3$，再进一步有

$$\frac{\partial^2 B^n}{\partial u_i\partial u_j}=n(n-1)(u_1E_1+u_2E_2+u_3E_3)^{n-2}E_iE_j b_{0,0,0},$$

$$i,\ j=1,2,3. \tag{16}$$

依(9)可得

$$\begin{aligned}D_1&=n(n-1)(u_1E_1+u_2E_2+u_3E_3)^{n-2}(E_1-E_2)(E_1-E_3)b_{0,0,0}\\&=n(n-1)\sum_{i+j+k=n-2}(E_1-E_2)(E_1-E_3)b_{i,j,k}B^{n-2}_{i,j,k}(P)\end{aligned}$$

由（15）的第一式立知 $D_1\geqslant 0$ 对 $P\in\mathscr{T}$ 成立．类似地，由（15）的第二式、第三式可以分别推出 $D_2\geqslant 0$，$D_3\geqslant 0$ 对 $P\in\mathscr{T}$

成立. 因此，不等式(10)对一切 $P\in\mathscr{T}$ 成立. 依定理 8.2，知三角曲面 B^n 在 $\mathscr{T}$ 上是凸的. 证完.

定理 8.4 表明，Bézier 三角曲面继承了其 B-网的凸性. 这一定理在理论上及实践上都有着重要的意义. 从理论上说，它引起了后来关于 Bézier 三角曲面凸性的一系列的研究，这种研究至今仍在继续；从实践上来说，它提供了设计凸曲面的一种简单易行的方法：只要调整有限个 Bernstein 系数使得 (15) 能被满足，那么 Bézier 三角曲面必然是凸曲面.

定理 8.4 有好多种不同的证明，下面再介绍一个由［常庚哲、冯玉瑜 '85］提出的证明，其中用到了 Farin 的升阶 B-网的收敛性定理.

从第五章知道，经过一次升阶之后，新的 Bernstein 系数成为

$$b^*_{i,j,k}=\frac{1}{n+1}(ib_{i-1,j,k}+jb_{i,j-1,k}+kb_{i,j,k-1}),$$

这里 $i+j+k=n+1$. 令

$$\left.\begin{aligned}\Delta_1 &:=(E_1-E_2)(E_1-E_3),\\ \Delta_2 &:=(E_2-E_3)(E_2-E_1),\\ \Delta_3 &:=(E_3-E_1)(E_3-E_2),\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

经过直接的计算可以证明

$$\begin{aligned}\triangle_1 b^*_{i,j,k}=\frac{1}{n+1}(i\triangle_1 b_{i-1,j,k}&+j\triangle_1 b_{i,j-1,k}\\ &+k\triangle_1 b_{i,j,k-1}),\end{aligned}$$

这里 $i+j+k=n-1$. 对于 $\triangle_2$ 与 $\triangle_3$ 也有类似的公式. 由此可见，如果(15)式成立，那么有

$$\left.\begin{aligned}\triangle_1 b^*_{i,j,k}\geqslant 0,\\ \triangle_2 b^*_{i,j,k}\geqslant 0,\\ \triangle_3 b^*_{i,j,k}\geqslant 0,\end{aligned}\right\}\quad i+j+k=n-1.\tag{18}$$

这表明，一个凸的 B-网经过一次乃至任意多次升阶之后，仍然是凸的 B-网. 由于升阶 B-网序列收敛到对应的 Bézier 三角曲面，并且注意到曲面的凸性是由不等式来定义的，而极限运算保持不等式的方向不变，可见三角曲面作为由凸的 B-网组成的序列，也应当是一个凸曲面.

定理 8.4 的图示，可参看图 5.6，不过，按我们的定义，要用（-1）去乘其中的 B-网和它对应的曲面，才是凸的 B-网和凸曲面.

§3 弱凸的 B-网

由定理 8.4 可知，B-网的凸性是它的三角曲面为凸的一个充分条件，但远远不是必要条件，即使对于二次的三角曲面的凸性，它也不是必要的. 考察由图 8.5 所示的 Bernstein 系数作成的 B-网，(见图 8.5)，由于$(-1)+0-(0+0)=-1<0$，它不是凸的. 这个 B-网生成的二次曲面是

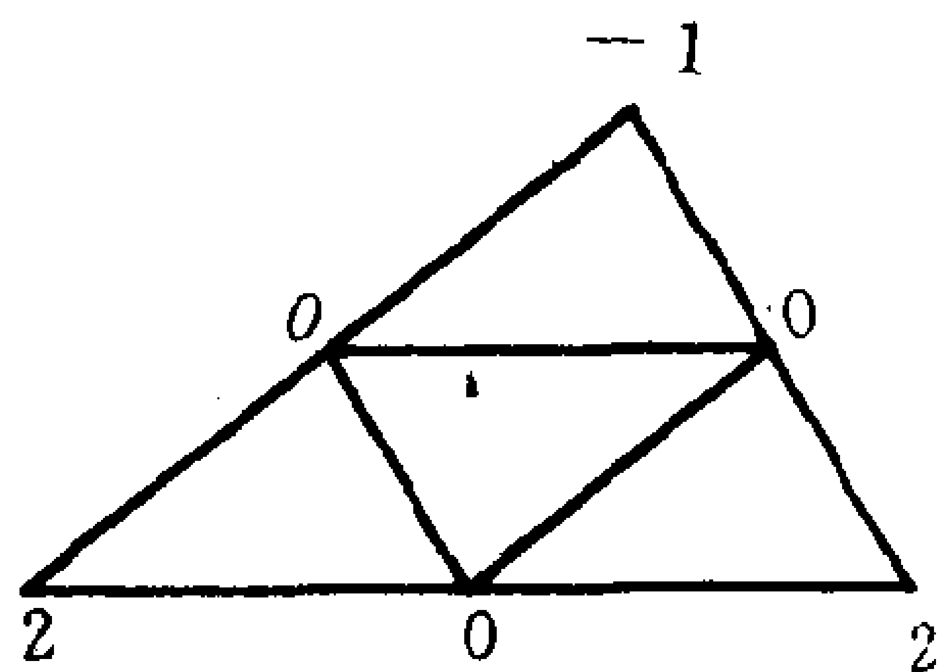


图 8.5 二次曲面的 Bernltein 系数

$$B^2(P)=-u_1^2+2u_2^2+2u_3^2.$$

按公式(9)算出

$$D_1=-2,\ D_2=D_3=4,$$

可见(11)中的三个不等式全部满足，所以 $B^2(P)$ 是凸曲面. 由此可见应当寻求更一般的保凸条件. 在这一个方向上的努力中，

下列定理是第一个工作.

定理 8.5 [常庚哲、冯玉瑜 '84] 如果 B-网满足

$$\left.\begin{aligned}&(\triangle_1+\triangle_3)b_{i,j,k}\geqslant 0,\\&(\triangle_2+\triangle_3)b_{i,j,k}\geqslant 0,\\&\triangle_1 b_{i,j,k}\triangle_2 b_{i,j,k}+\triangle_2 b_{i,j,k}\triangle_3 b_{i,j,k}+\triangle_3 b_{i,j,k}\triangle_1 b_{i,j,k}\geqslant 0,\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

其中 $i+j+k=n-2$，那么它所对应的 Bézier 三角曲面在 $\mathscr{T}$ 上是凸的.

当 $n=2$ 与 $n=3$ 的情形，(19) 也是三角曲面为凸的必要条件.

证明 因为

$$\sum_{i=1}^{3}D_i\xi_i^2=n(n-1)\sum_{i+j+k=n-2}(\xi_1^2\triangle_1+\xi_2^2\triangle_2+\xi_3^2\triangle_3)b_{i,j,k}B_{i,j,k}^{n-2}.\qquad(20)$$

可见当

$$(\xi_1^2\triangle_1+\xi_2^2\triangle_2+\xi_3^2\triangle_3)b_{i,j,k}\geqslant 0\qquad(21)$$

对一切 $i+j+k=n-2$ 成立时，便有 $\Sigma D_i\xi_i^2\geqslant 0$，从而保证了 $B^n(P)$ 是 $\mathscr{T}$ 上的凸函数. 但是，(21) 成立的必要充分条件恰好是(19)，这一点从定理 8.3 的证明过程中可以看出来.

现在讨论 $n=2$，3 的情形. 当 $n=2$ 时，(20) 的右边只有一项，即

$$2(\xi_1^2\triangle_1+\xi_2^2\triangle_2+\xi_3^2\triangle_3)b_{0,0,0}.$$

如果 $B^2(P)$ 在 $\mathscr{T}$ 上是凸的，那么上式对于适合 $\xi_1+\xi_2+\xi_3=0$ 的一切三数组 (ξ_1,ξ_2,ξ_3) 都必须不取负值，因此(19) 这时是必要的. 当 $n=3$ 时，(20) 的右边有三项，若略去常数因子 6 不计，那就是

$$u_1(\xi_1^2\triangle_1+\xi_2^2\triangle_2+\xi_3^2\triangle_3)b_{1,0,0}$$

$$+ u_2(\xi_1^2\triangle_1 + \xi_2^2\triangle_2 + \xi_3^2\triangle_3)b_{0,1,0}$$
$$+ u_3(\xi_1^2\triangle_1 + \xi_2^2\triangle_2 + \xi_3^2\triangle_3)b_{0,0,1}. \tag{22}$$

如果$B^3(P)$是凸的,则对于一切$\xi_1+\xi_2+\xi_3=0$及$P=(u_1,u_2,u_3)\in\mathscr{T}$,(22)中的表达式取非负的值.依次令$(u_1,u_2,u_3)$为$(1,0,0)$,$(0,1,0)$及$(0,0,1)$,可见这时必须

$$\left.\begin{aligned}&(\xi_1^2\triangle_1 + \xi_2^2\triangle_2 + \xi_3^2\triangle_3)b_{1,0,0} \geqslant 0,\\&(\xi_1^2\triangle_1 + \xi_2^2\triangle_2 + \xi_3^2\triangle_3)b_{0,1,0} \geqslant 0,\\&(\xi_1^2\triangle_1 + \xi_2^2\triangle_2 + \xi_3^2\triangle_3)b_{0,0,1} \geqslant 0.\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

对适合$\xi_1+\xi_2+\xi_3=0$的三数组(ξ_1,ξ_2,ξ_3)成立.由此可见(19)也是必要的.证毕.

显然,定理8.5包含定理8.4作为特例.读者可以自行验证,图8.5中所示数据,适合条件(19),因此它对应于一个凸的二次曲面.

至今为止,对于4次Bézier三角曲面,还没有找出一个通过其Bernstein系数表达出来的保凸的必要充分条件.

为了行文的方便,我们说一个B-网若适合(19),则被称为是**弱凸的**.显然,凸的B-网一定是弱凸的.定理8.5可以简洁地表示为:弱凸的B-网产生凸的三角曲面.

凸B-网有鲜明的几何形象,但是弱凸的B-网却没有.为了尽可能多地获得弱凸的B-网的几何特征,我们要进行下一节的讨论.

§4 *B*-网的网线

如果(19)中的三个不等式都得到满足,则可导出另一组不等式

$$(\triangle_1+\triangle_2)b_{i,j,k}\geqslant 0, \tag{23}$$

其中$i+j+k=n-2$. 让我们来看看不等式(23)的几何意义. 由于

$$\begin{aligned}\triangle_1+\triangle_2&=(E_1-E_2)(E_1-E_3)\\&\quad+(E_2-E_3)(E_2-E_1)\\&=(E_1-E_2)(E_1-E_3-E_2+E_3)\\&=(E_1-E_2)^2=E_1^2-2E_1E_2+E_2^2,\end{aligned}$$

因此(23)可以表示为

$$b_{i+2,j,k}-2b_{i+1,j+1,k}+b_{i,j+2,k}\geqslant 0, \tag{24}$$

而上式意味着对于固定的$k\in\{0,1,\cdots,n\}$, 数列

$$\{b_{i,j,k}\},\quad i=0,1,2,\cdots,n-k, \tag{25}$$

(其中$i+j+k=n$)的二阶差分数列全由非负实数组成. 将B-网限制在$u_3=k/n$上，得到的是B-网上的一条折线，它由$n-k$段直线组成. 这条折线被称为**B-网的第三向的第$n-k$条网线**，$k=0, 1, \cdots, n$. 第0条网线退化成一个点，即B-网的第三个角点，第1条网线系由一条直线段组成，如此等等，第n条网线是B-网上对应于$u_3=0$的那一条边界.

类似地可以定义B-网的第一向网线及第二向网线.

不等式(24)表明，第三向的第$n-k$条网线是凸的. 连同(19)的前两式一起考虑，我们可以说：**弱凸的B-网上所有的网线都必须是凸的**. 这是关于弱凸的B-网的几何形象的一个最基本、最简单的描述；对于(19)中最后那个不等式组则很难作出几何解释.

定理8.4与定理8.5都表明：B-网的整体形状确确实实在"控制"着对应的三角曲面，下面即将看到，即使是网线的几何形状也在控制着三角曲面的某些几何特性.

具体地说，我们有如下的

定理 8.6 1°如果第三向的所有网线有同样的单调性，那么对应的 Bézier 三角曲面限制在任何 u_3=常数所成的曲线也具有相同的单调性；

2°如果第三向的所有网线都是凸的，那么对应的 Bézier 三角曲面限制在任何 u_3=常数所成的曲线也是凸的.

证明 首先设对于固定的 $k\in\{0,1,\cdots,n-1\}$ 有

$$b_{i+1,j,k}\geqslant b_{i,j+1,k},\tag{26}$$

其中 $i+j=n-k-1$. 今计算 $B^n(P)$ 沿着方向 T_2T_1 的方向导数. 注意到 T_2T_1 这一方向可由三数组(1，－1,0) 来表示,一阶方向导数的公式(3) 成为

$$\begin{aligned}\frac{\partial B^n}{\partial u_1}-\frac{\partial B^n}{\partial u_2}&=n(u_1E_1+u_2E_2+u_3E_3)^{n-1}(E_1-E_2)b_{0,0,0}\\&=n(u_1E_1+u_2E_2+u_3E_3)^{n-1}(b_{1,0,0}-b_{0,1,0})\\&=n\sum_{i+j+k=n-1}(b_{i+1,j,k}-b_{i,j+1,k})B^{n-1}_{i,j,k}(P)\geqslant 0,\end{aligned}$$

推导中的最后一步利用了(26). 这表明,在条件(26)之下 $B^n(P)$ 的沿方向 T_2T_1 的一阶方向导数在 $\mathscr{T}$ 的每一点上均取非负的值，从而得出 $B^n(P)$限制在 u_3=常数所得的每一条曲线都是递增的. 这就证完了第一个结论.

现在来证明定理的第二个结论. 我们设不等式 (24) 成立，然后来证明沿方向 (1，－1，0) 的二阶方向导数是非负的. 依计算二阶方向导数的公式 (5)，代入 $(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(1,-1,0)$，得出

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2B^n}{\partial u_1^2}+\frac{\partial^2B^n}{\partial u_2^2}-2\frac{\partial^2B^n}{\partial u_1\partial u_2}=n(n-1)\\&(u_1E_1+u_2E_2+u_3E_3)^{n-2}(b_{2,0,0}-2b_{1,1,0}+b_{0,2,0})\\&=n(n-1)\sum_{i+j+k=n-2}(b_{2+i,j,k}-2b_{i+1,j+1,k}\end{aligned}$$

$$+ b_{i,j+2,k})B^{n-2}_{i,j,k}(P) \geqslant 0$$

对一切点 $P \in \mathscr{T}$ 成立，这就证完了第二个结论．证毕．

§5 三角曲面片的连续拼接

这一节的内容似乎与本章的主旨无关．既然如此，为什么我们还要把它放在这里？有两方面的原因．第一，要研究连续拼接的问题，需要方向导数的概念，这一概念我们刚刚在§1中介绍过它；第二，在下一节中将要讨论连续且保凸的拼接的可能性，这样就使本节的内容成为必要．

设想在同一个三角形 $\mathscr{T}=T_1T_2T_3$ 上，定义着两张 n 次 Bézier 三角曲面，它们的 Bernstein 系数分别是 $\boldsymbol{b}=\{b_{i,j,k}\}$ 与 $\boldsymbol{c}=\{c_{i,j,k}\}$，具体地说

$$\left.\begin{aligned} B^n(\boldsymbol{b};P) &= (u_1E_1+u_2E_2+u_3E_3)^n b_{0,0,0}, \\ B^n(\boldsymbol{c};P) &= (u_1E_1+u_2E_2+u_3E_3)^n c_{0,0,0} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

为简便计，分别将它们写成 $B^n(\boldsymbol{b})$ 及 $B^n(\boldsymbol{c})$，也就是说，略去其中的变点 P 不写．将它们限制在边 T_2T_3 上，即令 $u_1=0$，得到

$$B^n(\boldsymbol{b})\big|_{T_2T_3} = \sum_{j=0}^{n} b_{0,j,n-j}B_j^n(u_2),$$

$$B^n(\boldsymbol{c})\big|_{T_2T_3} = \sum_{j=0}^{n} c_{0,j,n-j}B_j^n(u_2),$$

$u_2 \in [0,1]$．所以，如果

$$B^n(\boldsymbol{b})\big|_{T_2T_3} = B^n(\boldsymbol{c})\big|_{T_2T_3},$$

则必须而且只须

$$b_{0,j,k}=c_{0,j,k} \tag{28}$$

其中 $j+k=n$．

设 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ 表示一个方向，即是说 $\xi_1+\xi_2+\xi_3=0$，这两张曲面沿 ξ 的方向导数分别记为

$$\frac{\partial B^n(\boldsymbol{b})}{\partial\xi} \text{ 及 } \frac{\partial B^n(\boldsymbol{c})}{\partial\xi}.$$

由式（3）可知

$$\frac{\partial B^n(\boldsymbol{b})}{\partial\xi}=\sum_{l=1}^{3}\xi_l\frac{\partial B^n}{\partial u_l}(\boldsymbol{b})$$

$$=n\sum_{i+j+k=n-1}(\xi_1E_1+\xi_2E_2+\xi_3E_3)b_{i,j,k}B^{n-1}_{i,j,k}$$

于是有

$$\frac{\partial B^n(\boldsymbol{b})}{\partial\xi}\Big|_{T_2T_3}=n\sum_{j+k=n-1}(\xi_1E_1+\xi_2E_2+\xi_3E_3)b_{0,j,k}B^{n-1}_{0,j,k}.$$

类似地

$$\frac{\partial B^n(\boldsymbol{c})}{\partial\xi}\Big|_{T_2T_3}=n\sum_{j+k=n-1}(\xi_1E_1+\xi_2E_2+\xi_3E_3)c_{0,j,k}B^{n-1}_{0,j,k}$$

如果对任何 方向 ξ 有

$$\frac{\partial B^n(\boldsymbol{b})}{\partial\xi}\Big|_{T_2T_3}=\frac{\partial B^n(\boldsymbol{c})}{\partial\xi}\Big|_{T_2T_3} \tag{29}$$

则必须而且只须对任何方向 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ 有

$$(\xi_1E_1+\xi_2E_2+\xi_3E_3)b_{0,j,k}$$

$$=(\xi_1E_1+\xi_2E_2+\xi_3E_3)c_{0,j,k}, \tag{30}$$

这里 $j+k=n-1$. 特别地，令 $\xi=(1,-1,0)$，(30) 成为

$$(E_1-E_2)b_{0,j,k}=(E_1-E_2)c_{0,j,k},$$

即对一切 $j+k=n-1$ 有

$$b_{1,j,k}-b_{0,j+1,k}=c_{1,j,k}-c_{0,j+1,k}. \tag{31}$$

如果(28)成立，那么(30)等价于

$$b_{1,j,k}=c_{1,j,k} \tag{31}$$

对一切 $j+k=n-1$ 成立. 反过来也很明显，当(28)与(31)同时

成立时，便有(30)对一切方向 ξ 成立，即（29）成立.

设 $\eta=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ 代表另一方向，即这三数组适合 $\eta_1+\eta_2+\eta_3=0$. 讨论任一张 n 次三角曲面 B^n(暂不指定它是 $B^n(\boldsymbol{b})$ 或是 $B^n(\boldsymbol{c})$)，它关于两个方向 ξ 与 η 的二阶方向导数记为

$$\frac{\partial^2 B^n}{\partial\xi\partial\eta},$$

其中 ξ 可以与 η 相等，此时称之为沿 ξ 的**二阶单向方向导数**，当 ξ 与 η 不平行时则叫做沿 ξ 与 η 的**二阶混合方向导数**. 按照公式(5)，上述二阶方向导数等于

$$(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 B^n}{\partial u_1^2} & \dfrac{\partial^2 B^n}{\partial u_1\partial u_2} & \dfrac{\partial^2 B^n}{\partial u_1\partial u_3} \\ \dfrac{\partial^2 B^n}{\partial u_1\partial u_2} & \dfrac{\partial^2 B^n}{\partial u_2^2} & \dfrac{\partial^2 B^n}{\partial u_2\partial u_3} \\ \dfrac{\partial^2 B^n}{\partial u_1\partial u_3} & \dfrac{\partial^2 B^n}{\partial u_2\partial u_3} & \dfrac{\partial^2 B^n}{\partial u_3^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix},$$

依本章之引理，上式可以写为

$$D_1\xi_1\eta_1+D_2\xi_2\eta_2+D_3\xi_3\eta_3, \tag{32}$$

式中

$$D_1=\left(\frac{\partial}{\partial u_1}-\frac{\partial}{\partial u_2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u_1}-\frac{\partial}{\partial u_3}\right)B^n,$$

$$D_2=\left(\frac{\partial}{\partial u_2}-\frac{\partial}{\partial u_3}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u_2}-\frac{\partial}{\partial u_1}\right)B^n,$$

$$D_3=\left(\frac{\partial}{\partial u_3}-\frac{\partial}{\partial u_1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u_3}-\frac{\partial}{\partial u_2}\right)B^n.$$

如果把 B^n 具体化为 $B^n(\boldsymbol{b})$，那么在 $\mathscr{T}$ 的一边 T_2T_3 上(即 $u_1=0$ 时)

$$D_1\Big|_{u_1=0}=n(n-1)\sum_{j+k=n-2}(b_{z,j,k}+b_{0,j+1,k+1} - b_{1,j+1,k}-b_{1,j,k+1})B_j^{n-2}(u_2),$$

$$D_2\Big|_{u_1=0}=n(n-1)\sum_{j+k=n-2}(b_{0,j+2,k}+b_{1,j,k+1}-b_{1,j+1,k}$$
$$-b_{0,j+1,k+1})B_j^{n-2}(u_2).$$
$$D_3\Big|_{u_1=0}=n(n-1)\sum_{j+k=n-2}(b_{0,j,k+2}+b_{1,j+1,k}-b_{1,j,k+1}$$
$$-b_{0,j+1,k+1})B_j^{n-2}(u_2).$$
如果将 B^n 具体化为 $B^n(\boldsymbol{c})$，则只需将以上三式中的 b 全部改为 c 即可.

现在来讨论对任意两个方向 ξ 与 η 有
$$\frac{\partial^2 B^n(\boldsymbol{b})}{\partial\xi\partial\eta}\Big|_{u_1=0}=\frac{\partial^2 B^n(\boldsymbol{c})}{\partial\xi\partial\eta}\Big|_{u_1=0} \tag{33}$$
时必要且充分的条件. 先看必要性. 对于两个特殊的方向 $\xi=(1,-1,0)$ 与 $\eta=(1,0,-1)$，依(32)可知必须有
$$\sum_{j+k=n-2}(b_{2,j,k}+b_{0,j+1,k+1}-b_{1,j+1,k}-b_{1,j,k+1})B_j^{n-2}(u_2)$$
$$=\sum_{j+k=n-2}(c_{2,j,k}+c_{0,j+1,k+1}-c_{1,j+1,k}-c_{1,j,k+1})B_j^{n-2}(u_2),$$
这里 $B_j^{n-2}(u_2)$，$u_2\in[0,1]$，是单变数的 Bernstein 基函数，因此必须有
$$b_{2,j,k}+b_{0,j+1,k+1}-b_{1,j+1,k}-b_{1,j,k+1}$$
$$=c_{2,j,k}+c_{0,j+1,k+1}-c_{1,j+1,k}-c_{1,j,k+1},$$
其中 $j+k=n-2$. 在(28)与(31)成立的条件下，上式相当于
$$b_{2,j,k}=c_{2,j,k},\quad j+k=n-2. \tag{34}$$
反过来，如果(28)，(31)与(34)同时成立，那么，限制在边 T_2T_3 $(u_1=0)$ 上，曲面 $B^n(\boldsymbol{b})$ 与 $B^n(\boldsymbol{c})$ 有分别相等的 D_1,D_2,D_3，从而有相等的表达式(32). 这就是说，对于任何方向 ξ 与 η，有(33)成立.

递推地讨论下去，我们可得

定理 8.7 定义在同一个座标三角形上的两张 Bézier 三角

曲面 $B^n(\boldsymbol{b})$ 与 $B^n(\boldsymbol{c})$，它们在三角形的边 $u_1=0$ 上有直到 r 阶的、分别相等的各种方向导数的必要充分条件是

$$b_{i,j,k}=c_{i,j,k}, \quad i+j+k=n, \tag{35}$$

其中 $i=0, 1, 2, \cdots, r$. 几何地说，这两张曲面的 B-网上最靠近那对应的边界的 $r+1$ 条第一向网线应当分别地相等.

现在我们已具备条件来讨论两张三角曲面连续拼接的问题了.

设在座标三角形 $\mathscr{T}=T_1T_2T_3$ 上定义着一张 n 次 Bézier 三角曲面 $B^n(\boldsymbol{b})$. 在 $\mathscr{T}$ 之外有一点 T^*，三角形 $T^*T_2T_3$ 与 $\mathscr{T}$ 除了一条公共的边界 T_2T_3 之外没有其他的公共点（图 8.6）. 设 T^* 关于座标三角形 $\mathscr{T}$ 的面积座标是 (u_1^*, u_2^*, u_3^*)，这时 u_1^*, u_2^*, u_3^* 中虽出现负数，但仍适合关系 $u_1^*+u_2^*+u_3^*=1$. 我们的目的是要在三角形 $T^*T_2T_3$ 上构作一张 n 次 Bézier 三角曲面，使得它与 $B^n(\boldsymbol{b})$ 在公共的边界上有某种程度的连续拼接.

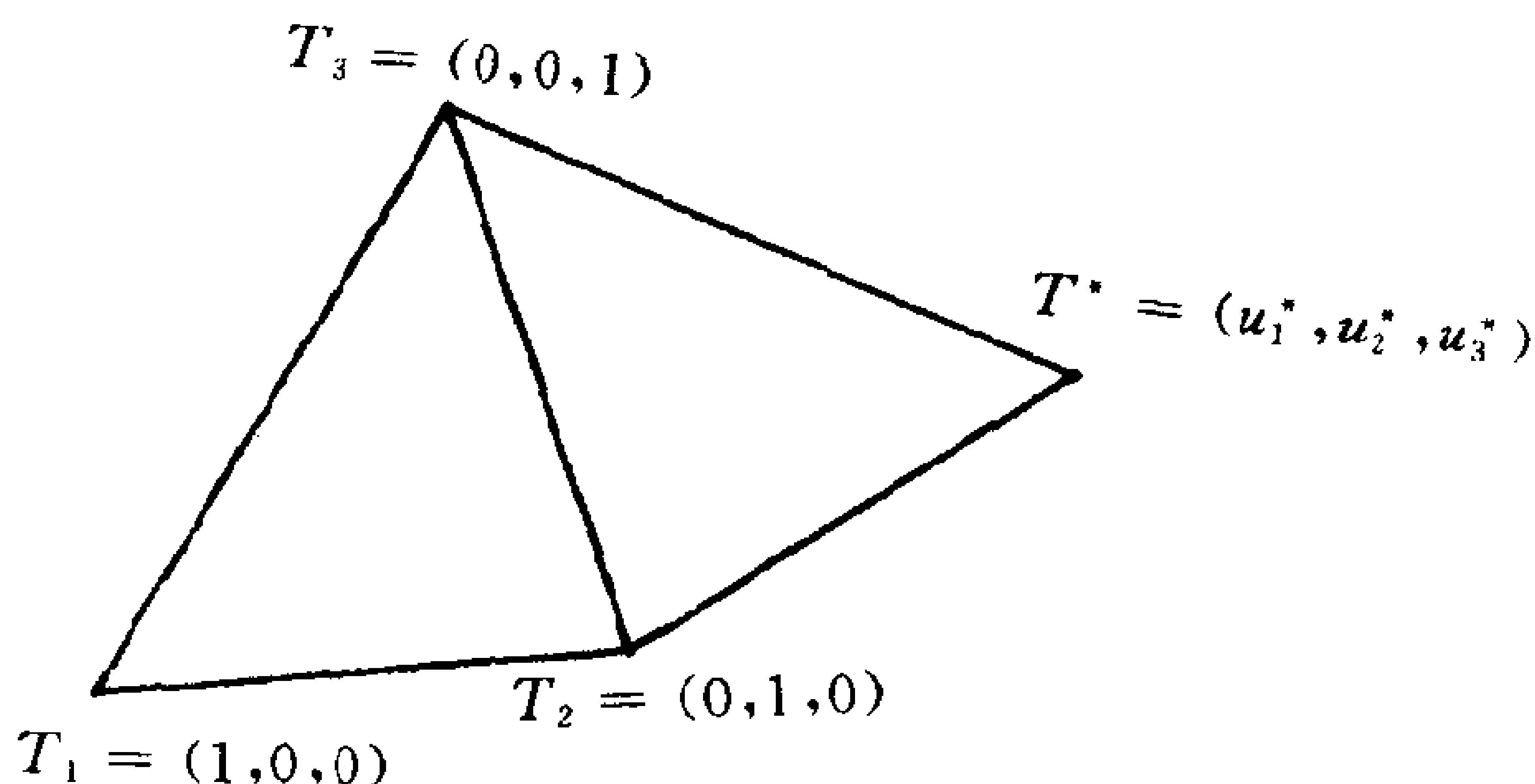


图 8.6　有一条公共边的两个三角形

虽然曲面 $B^n(\boldsymbol{b})$ 最初只是定义在座标三角形 $\mathscr{T}$ 上，但是它作为一个多项式函数，应当是在全平面上都有定义，特别地，它在三角形 $T^*T_2T_3$ 上也是完全确定的. 若将它限制在三角形 $T^*T_2T_3$ 那一部份曲面表为以 $T^*T_2T_3$ 为座标三角形 $T^*T_2T_3$ 上的 n 次 Bézier 三角曲面，于是按照第五章中的分割定理，它的 Bernstein 系数便是

$$b_{0,j,k}^{(i)}(u_1^*,u_2^*,u_3^*),$$

其中 $i+j+k=n$. 详细写来，乃是

$$(u_1^*E_1+u_2^*E_2+u_3^*E_3)^i b_{0,j,k}, \tag{36}$$

$i+j+k=n$，它们可以通过 de Casteljau 算法而得出.

由(36)确定的在 $T^*T_2T_3$ 上的三角曲面，作为在 $\mathscr{T}$ 上的三角曲面 $B^n(\boldsymbol{b})$的自然延拓，它们在公共的边界上有无穷次的连续性. 因此，如果定义在 $T^*T_2T_3$ 上的一张三角曲面 $B^n(\boldsymbol{c})$与由(36)所确定的曲面在 T_2T_3 有直到 r 阶的各种方向导数，那么有理由认为 $B^n(\boldsymbol{b})$与 $B^n(\boldsymbol{c})$在它们的公共边界上是 C^r-连续的.

有了上述 C^r-连续的定义，利用定理 8.7 立即得到

定理 8.8 三角形 $\mathscr{T}=T_1T_2T_3$ 上的 Bézier 三角曲面 $B^n(\boldsymbol{b})$与三角形 $T^*T_2T_3$ 上的 Bézier 三角曲面 $B^n(\boldsymbol{c})$在 T_2T_3 上是 C^r-连续的，当且仅当

$$c_{i,j,k}=b_{0,j,k}^{(i)}(u_1^*,u_2^*,u_3^*), \tag{37}$$

其中 $i=0$，1，…，r 而 $j+k=n-i$，其中 (u_1^*,u_2^*,u_3^*) 是点 T^* 关于 $\mathscr{T}$ 的面积座标.

讨论三种特殊情况.

C^0-连续

这时(37)成为

$$c_{0,j,k}=b_{0,j,k},\quad j+k=n.$$

这表明当限制在 T_2T_3 上时，两个 B-网的控制点分别重合. 因此，这两张曲面有一条重合的边界曲线；从而 C^0-连续又可称为位置连续.

C^1-连续

这时（37）包含两组等式

$$c_{0,j,k}=b_{0,j,k},\quad j+k=n. \tag{38}$$

$$c_{1,j,k}=u_1^*b_{1,j,k}+u_2^*b_{0,j+1,k}+u_3^*b_{0,j,k+1},\quad j+k=n-1. \tag{39}$$

等式(38)的几何意义是两曲面有位置连续. 余下来只须讨论

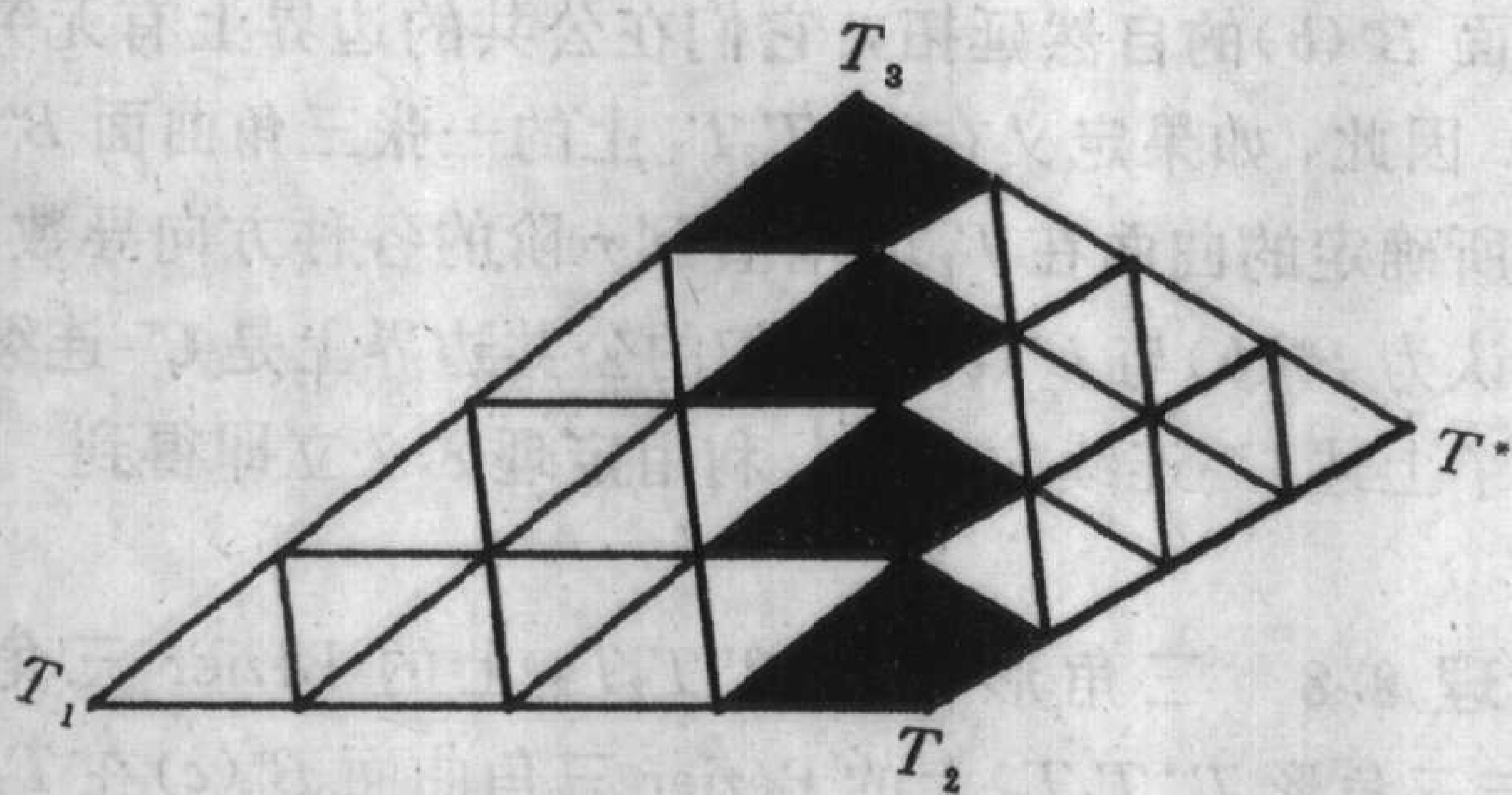


图 8.7 C^1-连续

(39)的几何意义. 考察图 8.7，图中的 $n=4$，其中有 4 对涂黑了的子三角形，每一对中有一个子三角形在 $\mathscr{T}$ 中，另一个在三角形 $T^*T_2T_3$ 中，它们有一公共边. 注意：它们分别与三角形 $\mathscr{T}$ 与三角形 $T^*T_2T_3$ 相似. 如果取那个在 $\mathscr{T}$ 中的子三角形为座标三角形，那么另一子三角形中与公共边相对的那个顶点关于这一新的座标三角形的面积座标也是 (u_1^*, u_2^*, u_3^*). 公式

(39)的意义是：数值$c_{1,j,k}$是由$\mathscr{T}$上方的三个控制点：

$$\left(\frac{1}{n},\frac{j}{n},\frac{k}{n};b_{1,j,k}\right),$$

$$\left(\frac{0}{n},\frac{j+1}{n},\frac{k}{n};b_{0,j+1,k}\right),$$

$$\left(\frac{0}{n},\frac{j}{n},\frac{k+1}{n};b_{0,j,k+1}\right)$$

所决定的线性函数在点(u_1^*,u_2^*,u_3^*)处所取的值；或者说，在两张 B- 网上对应于图 8.7 的涂黑部份的各对三角形是共面的.

C^2-连续

这时 (37) 包含着三组等式. 其中第一组与第二组等式相当于说曲面首先必须是C^1-连续的. 由于刚才我们已说明C^1-连续的意义，故只须讨论第三组等式：

$$c_{2,j,k}=b_{0,j,k}^{(2)}(u_1^*,u_2^*,u_3^*),j+k=n-2. \tag{40}$$

为了解释(40)，在$S_n(\mathscr{T})$中取出由 4 个子三角形组成的涂黑了的图形——一个大一些的三角形，其中有二个子三角形的一边在T_2T_3上；在剖分$S_n(T^*T_2T_3)$中也对应着由 4 个子三角形组

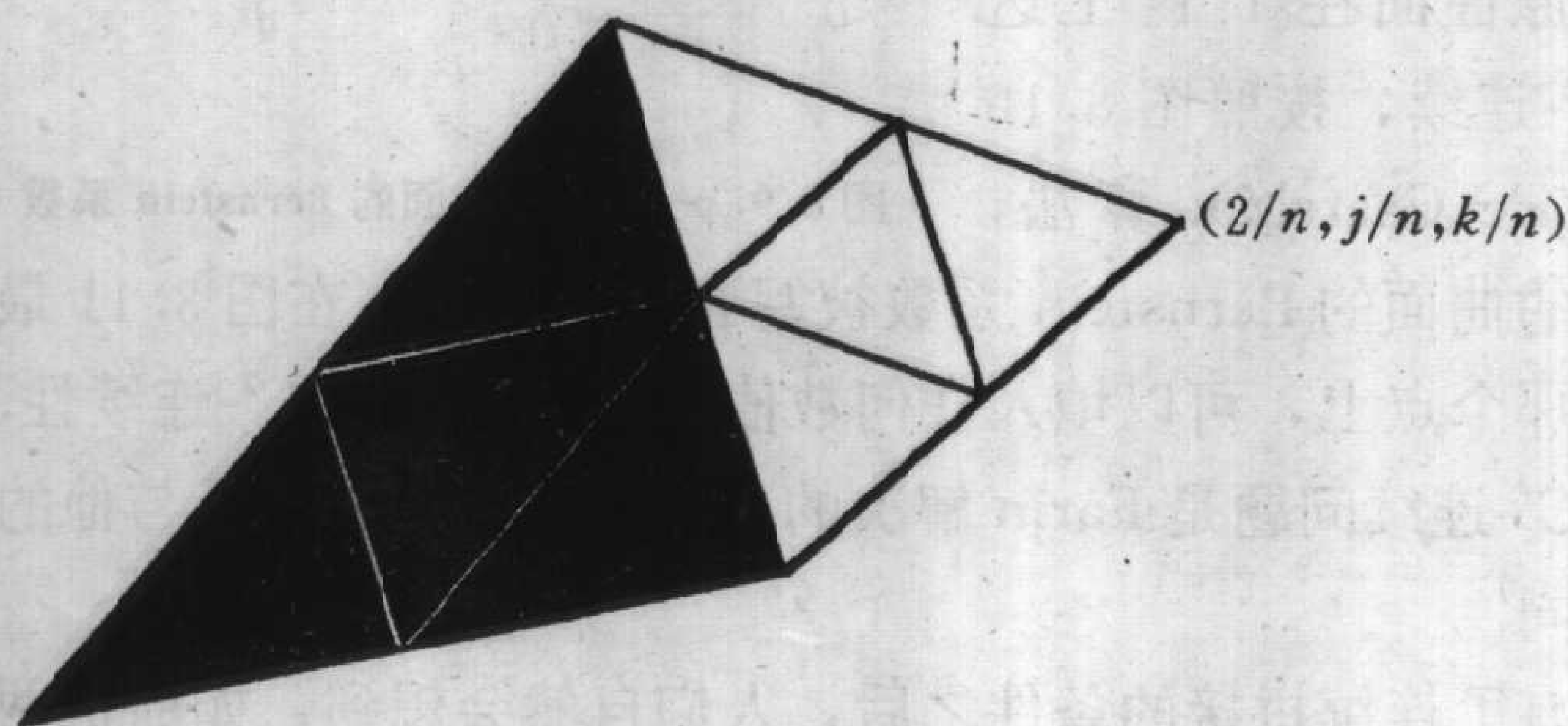


图 8.8 C^2-连续

成的图形(也是一个三角形)，见图 8.8. 很明显，这两个图形

(三角形)分别与 $\mathscr{T}$ 以及三角形 $T^*T_2T_3$ 相似. 因此座标三角形 $T^*T_2T_3$ 中的点 $(2/n, j/n, k/n)$ 关于涂上了黑色的那个图形(三角形)的面积座标也是(u_1^*, u_2^*, u_3^*), 依分割定理, (40)表示的几何意义是: 新的控制点(即在曲面 $B^n(c)$ 的 B-网上的控制点)

$$\left(\frac{2}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n}; c_{2,j,k}\right)$$

一定是在由涂黑了的图形所对应的曲面 $B^n(\boldsymbol{b})$ 的 B-网上的 6 个控制点所决定的二次 Bézier 三角曲面的自然延拓上.

对于高阶的连续拼接, 也可以作出类似的几何解释.

最后, 我们给出一个数值例子.

设在三角形 $\mathscr{T}$ 上给定一张 3 次的 Bézier 三角曲面, 它的 Bernstein 系数由图 8.9 表示. $\mathscr{T}$ 外的一点 $T^* = (-2, 3/2, 3/2)$, 要在三角形 $T^*T_2T_3$ 上构作一张 3 次 Bézier 三角曲面, 使之与原曲面在 T_2T_3 上达到 C^2-连续, 按照图 8.10 实行 de Casteljau 算法, 所求的曲面的 Bernstein 系数被写在图 8.11 中. 在图 8.11 最上边的那个点上, 可以填入任何数值, 都不会影响 C^2-连续性.

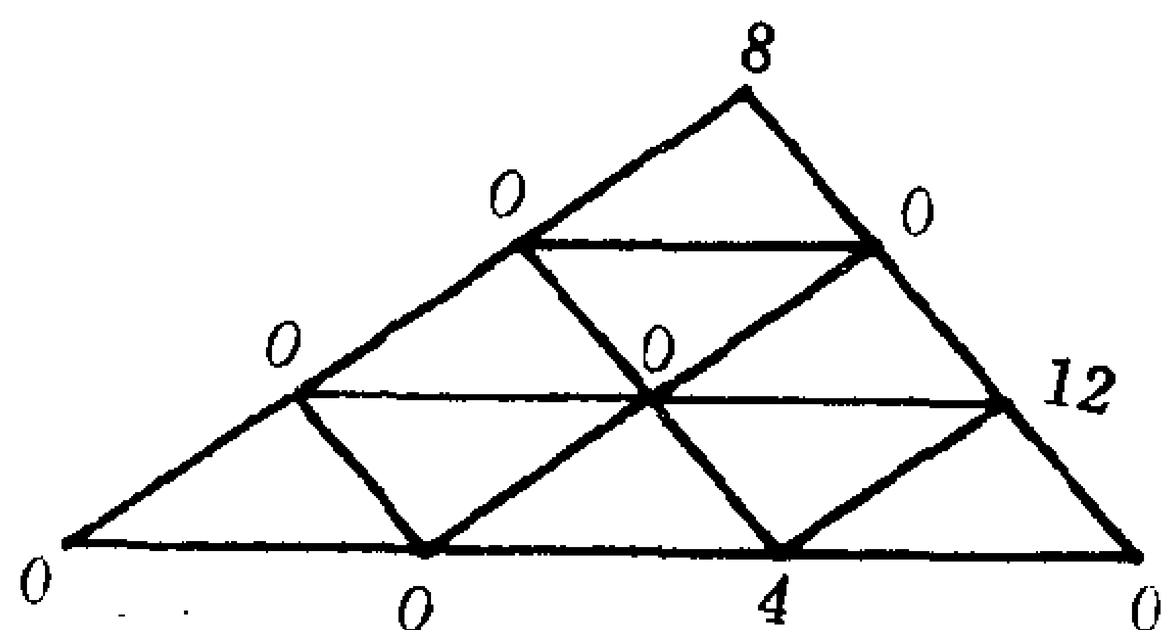


图 8.9 一张三次曲面的 Bernstein 系数

C^r-连续问题是 Farin 解决的, 但我们这里的推导与他的方法不同.

有了连续拼接的条件之后, 人们自然会想到: 如何把两张凸的三角曲面拼接起来, 同时又在共同边界上达到某种连续条件? 由于凸的 B-网一定产生凸的三角曲面, 因此人们考虑把两

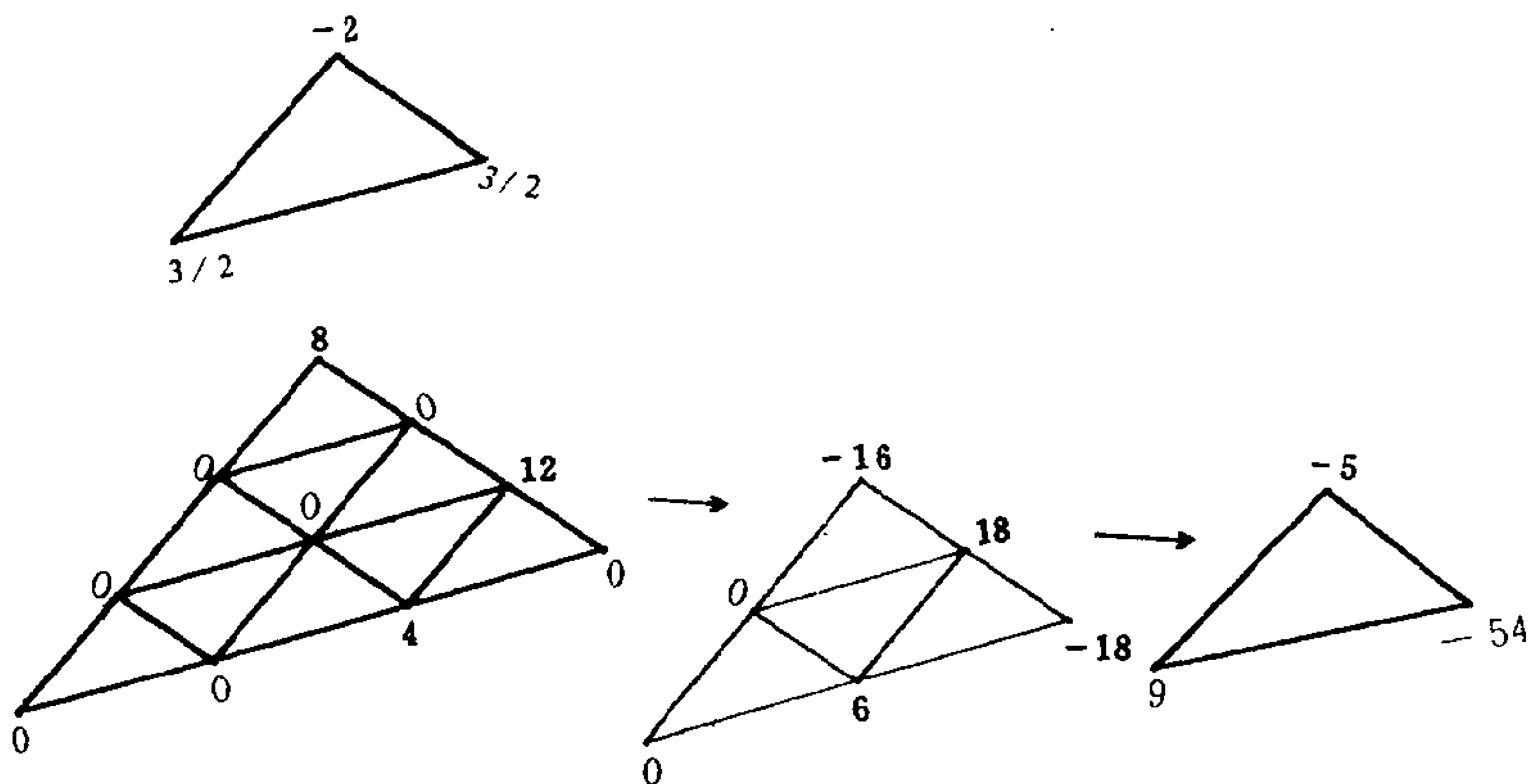


图 8.10

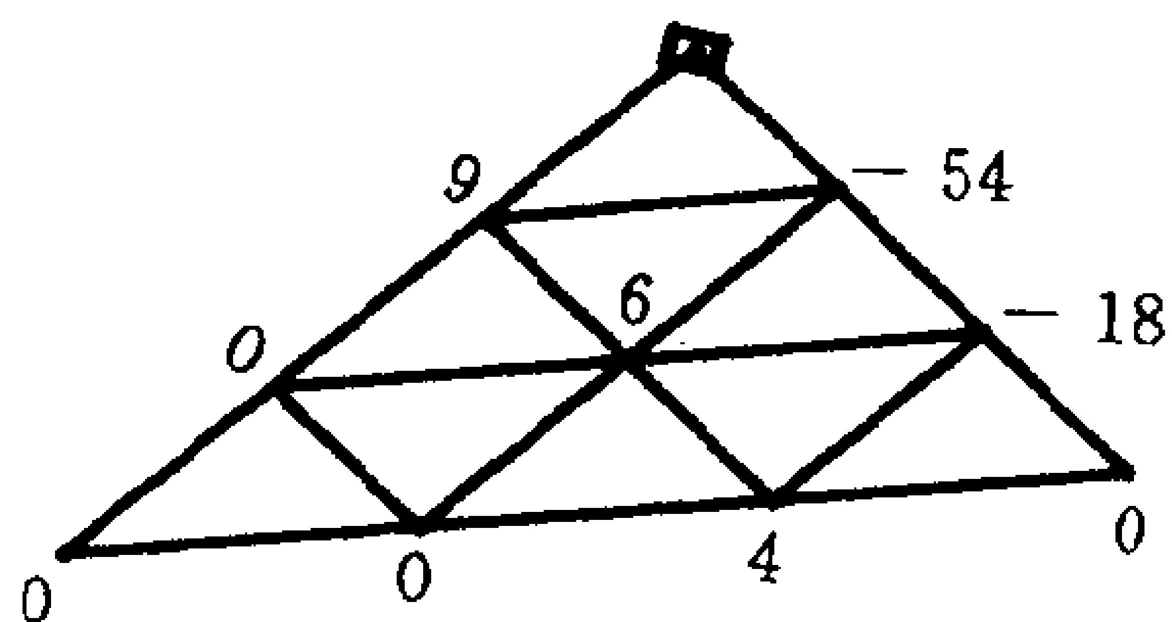


图 8.11

张凸的 B-网作连续拼接的可能性：[Grandine'89] 举出的例子说明：这只有在极平凡的情况下才能实现.

设三角形 $\mathscr{T}=T_1T_2T_3$ 与三角形 $T^*T_2T_3$ 组成一个非凸的四边形(见图 8.12)，又设 T^* 关于 $\mathscr{T}$ 的面积座标是 (u_1^*,u_2^*,u_3^*)，显然这时 $u_1^*<0$，

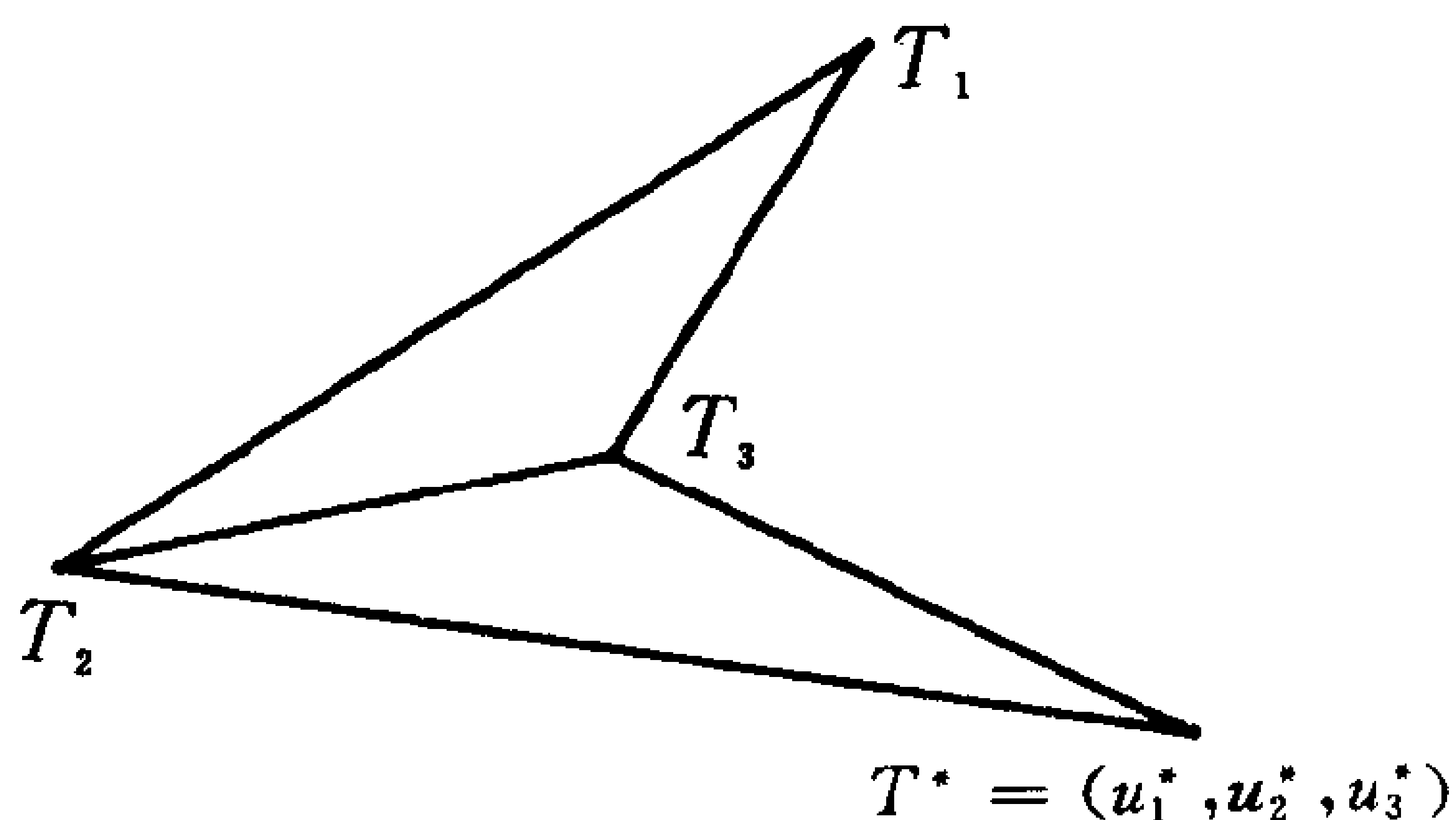


图 8.12

$u_2^* < 0$. 在两个三角形的公共边上任取相邻的三个结点，又在每一个三角形上都取两个与这三个结点最近的两个结点（见图8.13），为了记号的简便，这七个结点上对应的 Bernstein 系数如图 8.13 所示.

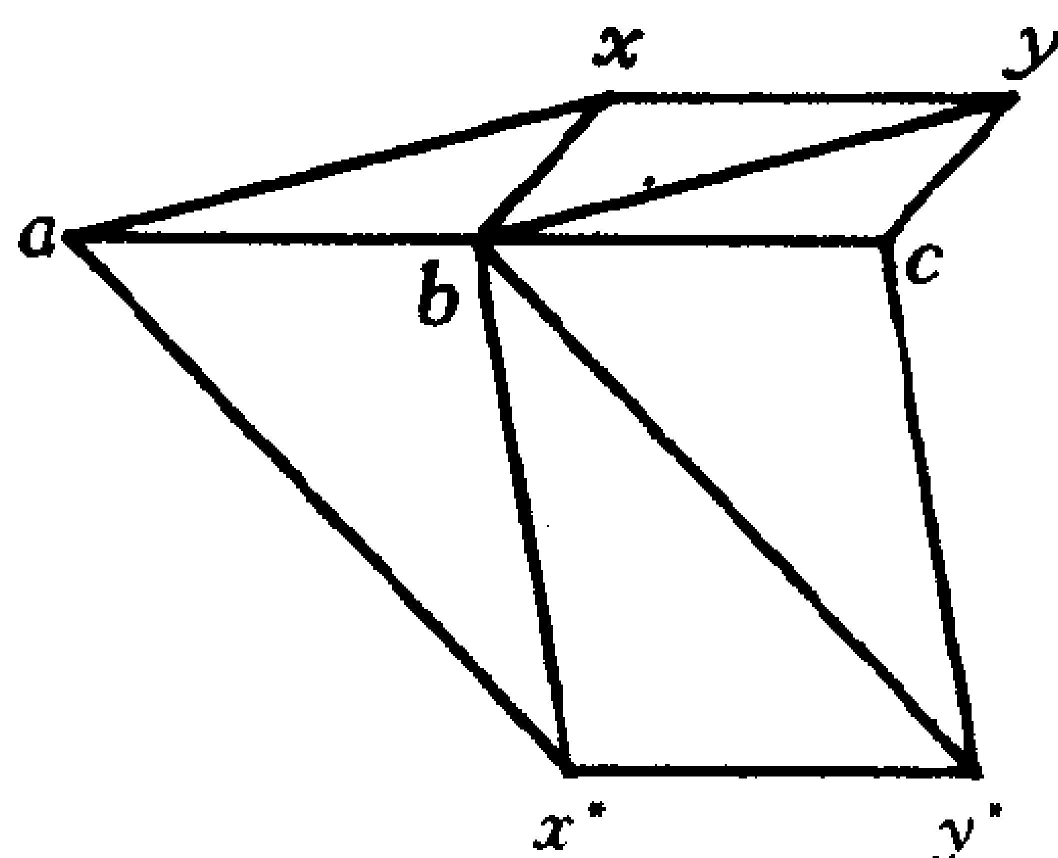


图 8.13

由于凸的 B-网的边界是凸曲线，所以

$$a+c \geqslant 2b. \tag{41}$$

如果曲面至少是 C^1-连续的，则有

$$\left.\begin{aligned} x^* &= xu_1^* + au_2^* + bu_3^*, \\ y^* &= yu_1^* + bu_2^* + cu_3^*. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

如果第二张是凸的 B-网，必须有 $x^*+c \geqslant y^*+b$，也就是

$$x^* - y^* \geqslant b - c. \tag{43}$$

将(42)代入(43)的左边得

$$(x-y)u_1^* + (a-b)u_2^* + (b-c)u_3^* \geqslant b-c,$$

移项化简得

$$(x-y)u_1^* + (a-b)u_2^* \geqslant (b-c)(u_1^* + u_2^*),$$

在上式中把 u_1^* 留在左边、把 u_2^* 移到右边：

$$(x+c-y-b)u_1^* \geqslant -(a+c-2b)u_2^* \geqslant 0$$

由于 $u_2^* < 0$ 及(41)可知上式蕴含着

$$(x + c - y - b)u_1^* \geqslant 0.$$

由于 $u_1^* < 0$,故只能有 $x+c-y-b \leqslant 0$. 考虑到第一张 B-网也是凸的，有 $x+c-y-b \geqslant 0$. 因此只能是 $x+c-y-b=0$. 由此还可推得 $a+c-2b=0$. 这表明：在两张 B-网上对应于图 8.13 的 7 个控制点共面. 由于在 B-网的交线上相邻的三个控制点是任取的，所以两张 B-网在它们的共同边界上以及最靠近这条边界的那一排网线上的所有控制点全都在同一平面上.

从以上的结论可以推出一些有趣的事实，例如，在一个等边三角形上设置一张非平面的三阶凸 B-网(这总是能办到的，而且有无穷多的办法来实现它)，它决定一个三次的凸曲面，从这三角形的中心（即三角形的重心）向每一个顶点联一直线段，把这三个形分成三个全等的三角形(见图 8.14). 限制在每一个

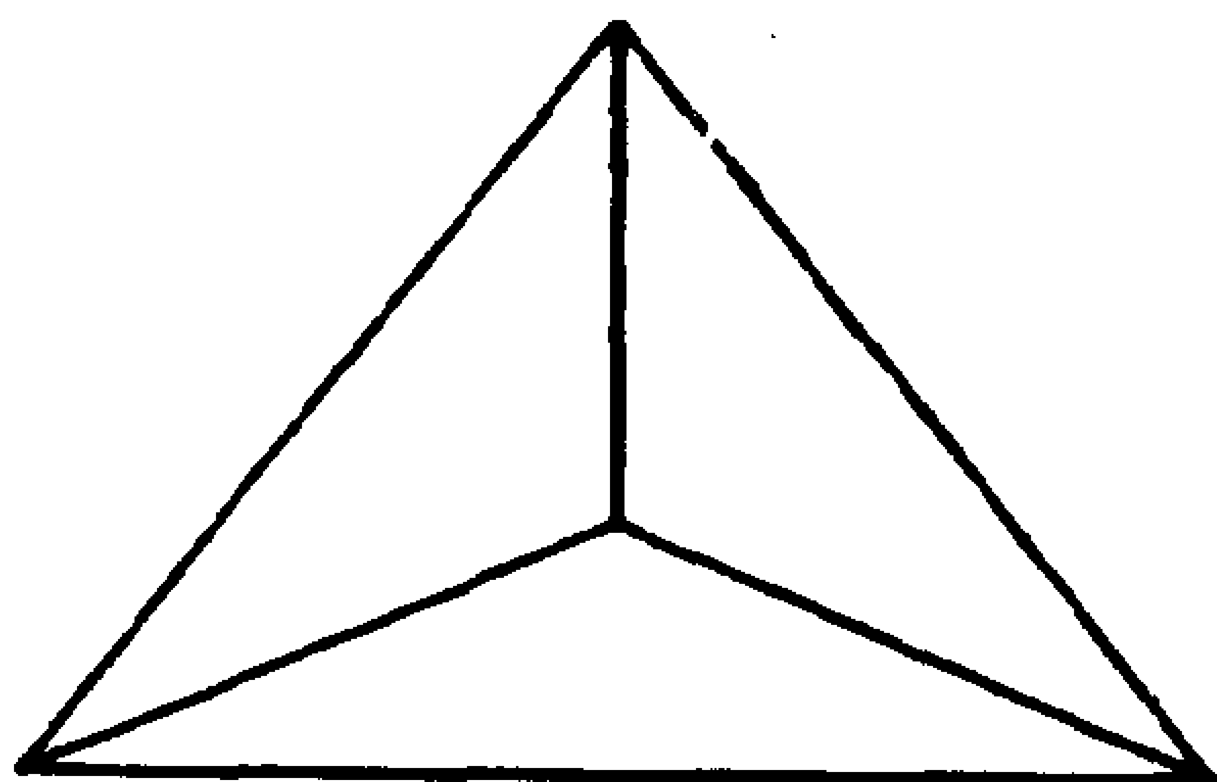


图 8.14

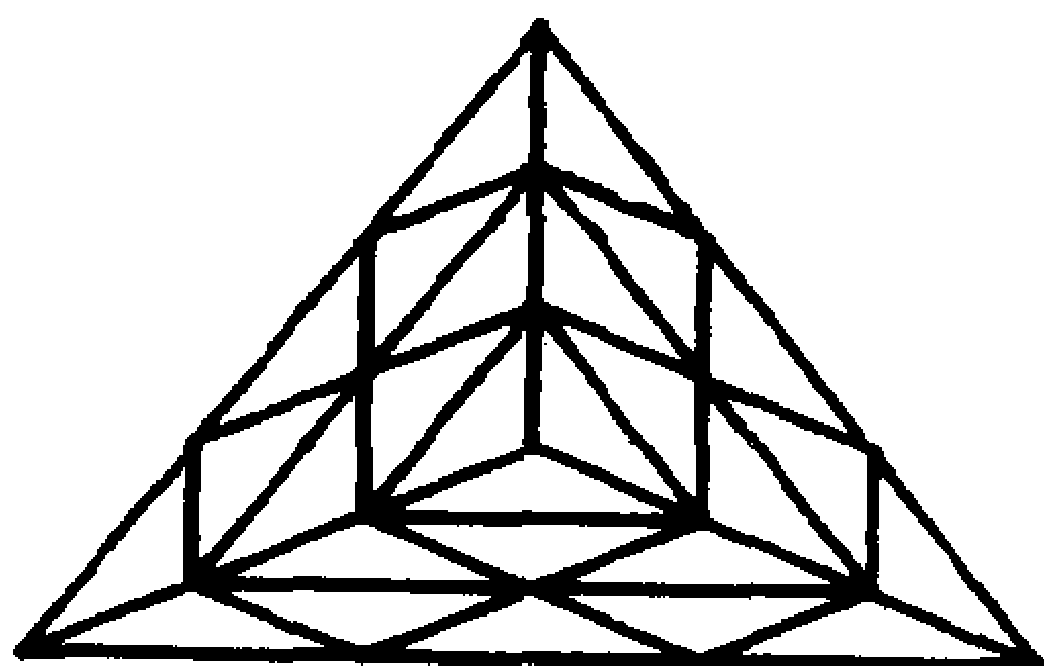


图 8.15

这种小三角形上，有一张凸的三角曲面. 在每一条公共边界上，那一对三角曲面 显然有任意阶的连续性，自然是 C^1-连续的. 依分割定理，可以算出每一张小曲面对应的 B-网. 如果这三个 B-网都是凸的，那么由图 8.15 可见，所有的控制点必须在同一张平面上，由此推出：原来的三角曲面必须是平面，原来的 B—网也必须是平面，这就是矛盾. 这说明，由分割而得出的 B-网中，至少有一个不是凸的，也就是说，分割算法不保持 B-网的凸性.

但是，冯玉瑜等证明（见[Feng et. al. '94]）分割算法保持 B-网的弱凸性

§6　结束语

本章的主旨在于讨论 Bézier 三角曲面的凸性，这个问题无论在理论上或是实践中都有着重要的意义．在实践中，人们总是希望用一种简单的方法来控制曲面的凸性，因为在日常生活与工程技术中，凸的曲面随处可见．

对于 Bézier 三角曲面而言，常庚哲与 Davis 1984 年的工作可以说是提出了关于凸性的第一个完整的结果，它描述的事实可以用一句话来概括："凸的 B-网产生凸的 Bézier 三角曲面"，或者说"Bézier 三角曲面具有保凸性"．这个定理为"Bézier 三角曲面继承了它的 B-网的几何特征"这种定性的描述又添加上有着严格数学表述的注记．

自那以后直到现在，关于三角曲面凸性理论的研究方面的文献大量涌现，本章中只提及常庚哲与冯玉瑜在 1984 年的工作，在那里提出的保凸条件，后来我们称之为"弱凸条件"，对于二次、三次三角曲面的凸性既是充分又是必要的，对于四次三角曲面，至今还未出现类似的工作．

我们在本章中完全没有涉及向量（参数）形式的 Bézier 三角曲面，对那类曲面而言，保凸条件的研究更为困难．二次 Bézier 参数三角曲面保凸的必要充分条件，是中国科学技术大学的青年教师郑津津给出的，见[Zheng'93]．

本章的篇幅较长，为了研究凸性，必须利用方向导数的概念，方向导数不止在研究曲面的凸性时，而且在研究曲面的其

他几何性质时，都是有用的工具.

本章的最后一节谈及两张 Bézier 三角曲面的 C^r-拼接的问题. 这个工作属于 Farin. 过去的函数逼近论专家虽然早已注意到了 Bernstein 三角多项式，但仅讨论单个的多项式，不涉及拼接问题. Farin 的工作的重要性在于使 Bézier 三角曲面可被应用于 CAGD，用来构造二维样条函数.

Grandine 的发现，凸出了弱凸的 B-网在生成由许多张 Bézier 三角曲面拼成的、具有适当连续性且整体凸的曲面时的地位和作用.

第九章　Coons 曲面

在 CAGD 中，除了 Bézier 曲面之外，最为适用、最为著名的另一类曲面就是 Coons 曲面，它们的发明者 S. A. Coons，与 Bézier 一样享有 CAGD 的奠基人的美誉.

本章将对 Coons 曲面作一简单的介绍，一般来说，Coons 曲面的数学理论不如 Bézier 曲面的相应理论来得丰富和深刻.

本章将普遍过采用向量的记号，一张空间曲面可以表示为向量方程

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) \tag{1}$$

其中 (u, v) 是一对参数，它们在 uv－平面上的一个区域 $\mathscr{D}$ 中变化，$\boldsymbol{r}=(x, y, z)$ 是三维笛卡尔座标系中自原点出发的一个向量. (1)称为这个曲面的**参数向量方程**. 方程(1)也可以按照分量写成

$$\begin{aligned} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v), \qquad (u,v) \in \mathscr{D} \\ z &= z(u,v). \end{aligned} \tag{2}$$

曲面(1)也可以视为由 uv-平面上的区域 $\mathscr{D}$ 到该曲面的一个映

象：

$$(u,v) \longrightarrow \boldsymbol{r}(u,v) \qquad (u,v) \in \mathscr{D}.$$

当 $v=v_0$ 取固定值时 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v_0)$ 变成了单参数 u 的向量值函数，这是曲面上的一条曲线，称为曲面的 **u-线**. 类似地可定义曲面的 v-线，即固定 u 值只让 v 变化所产生的曲线. 一般地说，过曲面上的一点 $\boldsymbol{r}(u_0, v_0)$ 有一条 u-线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v_0)$ 及一条 v-线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u_0, v)$ 通过，其中 (u_0, v_0) 是 $\mathscr{D}$ 中的一点.

切向量 $\frac{\partial}{\partial u}\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$ 是在点 $\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$ 的 u-线的切向量，而 $\frac{\partial}{\partial v}\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$ 是在点 $\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$ 的 v-线的切向量. 所以向量积

$$\frac{\partial}{\partial u}\boldsymbol{r}(u_0,v_0) \times \frac{\partial}{\partial v}\boldsymbol{r}(u_0,v_0) \tag{3}$$

是曲面在点 $\boldsymbol{r}(u_0, v_0)$ 处的法向量. 已知点 $\boldsymbol{r}(u_0, v_0)$ 及曲面在该点处的法向量，就很容易写出曲面在这一点上的切平面.

例 1 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是给定的三个向量，且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不平行，于是

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}u + \boldsymbol{b}v + \boldsymbol{c}$$

是一张平面的方程，其中 (u, v) 在全 uv一平面上变化. 这张平面过点 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{c}$，它的法向量在各点处都是一样的，即

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}.$$

例 2 考察以原点为中心、半径为 1 的球面，称之为单位球面，它可以表示为参数方程

$$\begin{cases} x = \sin u \cos v, \\ y = \sin u \sin v, \\ z = \cos u, \end{cases}$$

其中 $(u,v) \in \mathscr{D} = [0,\pi] \times [0,2\pi]$. 这时曲面的 u-线即球面上的“纬线”，而 v-线则是球面上的“经线”.

§1 双文字的记号

在讨论曲面的时候，Coons 使用了一些非常简洁的记号. 在前面，我们把一张曲面的参数向量方程记为 $\boldsymbol{r}(u,v)$，其中参数 (u，v) 在平面区域 $\mathscr{D}$ 中变化，由于在 CAGD 中讨论的是一片曲面（即曲面片），它占住的空间总是有限的，因此 $\mathscr{D}$ 可以被认为是一个有界的区域. 在适当的变换之下，可以把 $\mathscr{D}$ 变为 uv—平面上的单位正方形，即 $[0,1]\times[0,1]$，因此我们可以直接认为 $\mathscr{D}=[0,1]\times[0,1]$. 以前节的例 2 来说明，如果令 $u'=u/\pi$ 且 $v'=v/(2\pi)$，那么参数 (u',v') 的变化区域就是 $[0,1]\times[0,1]$.

在这种约定之下，曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 可以看作是由单位正方形上的点到曲面上的点之间的一个映象（图 9.1）.

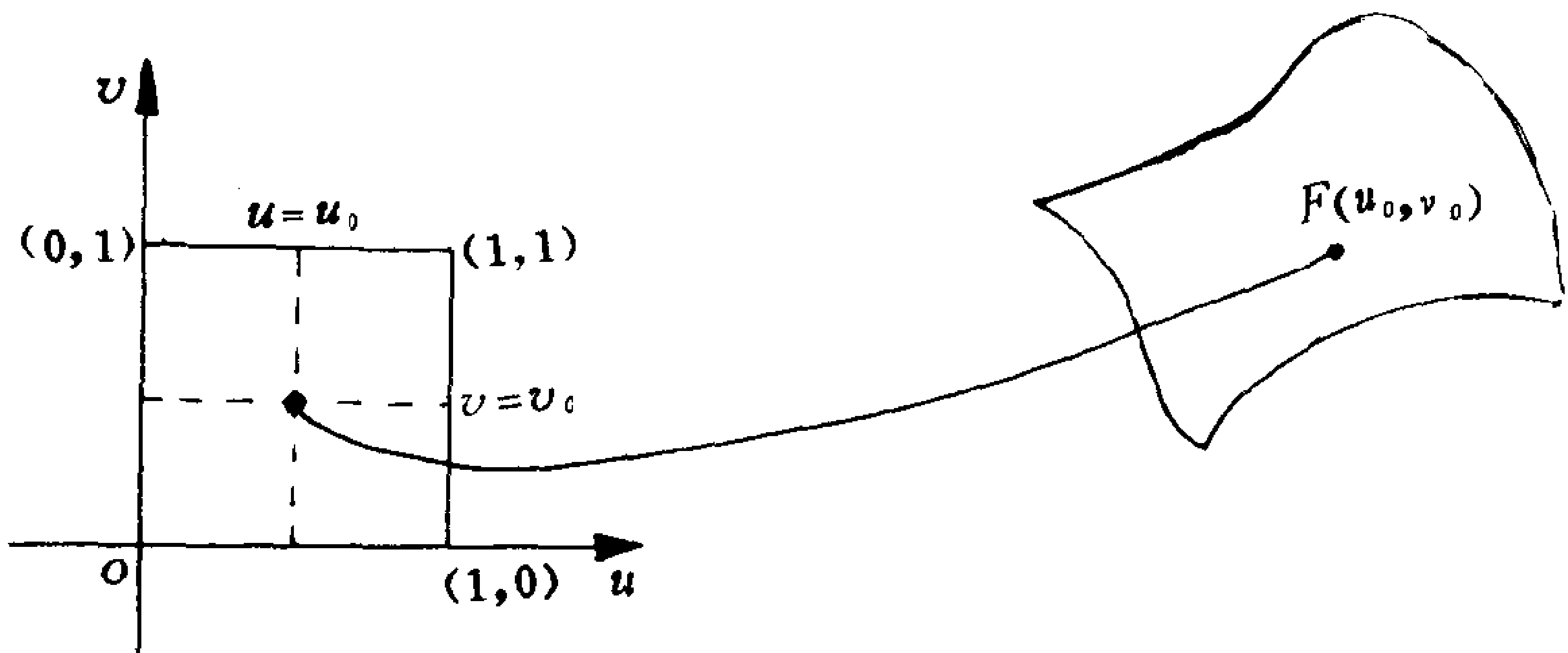


图 9.1 单位正方形到曲面上的映象

Coons 把向量值函数 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 直接记为 uv，请注意，这里 uv 决不是 u 与 v 这两个参数的乘积，而是被作为一个整体来看待

的一个"双文字的记号"，它本身表示着一个双参数 u 与 v 的向量值函数，(u, v) 在单位正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 上变化，因而代表一张曲面片. 相应地，$\boldsymbol{r}(0,v)$ 与 $\boldsymbol{r}(1,v)$ 直接表示为 $0v$ 及 $1v$，它们是两个单参数的向量函数，因而是两条曲线. 很明显，这是两条特殊的 v-线，代表着曲面的一对边界. 另一对边界是 $u0$ 与 $u1$，它们是一对特殊的 u-线. 这四条边界正好是参数平面（即 uv-平面）上单位正方形的四条边界的映象.

相邻的两条边界的交点是四个常值向量，即 00，01，10，11，它们分别是单位正方形的四个顶点 (0，0)，(0，1)，(1，0)，(1，1) 的映象. 向量 00，01，10，11 叫做曲面的四个**角点**.

上面介绍的这种简单的记号，不止是具有节约书写的功效，更重要的是强调了曲面上的点是由参数值直接确定的这一意义. 一旦习惯了这种记号，就会认识到它的确是简洁明了的记号，并不会带来任何混乱. 当然，如果我们同时要讨论两张或者好几张曲面，那就应当在 uv 的左边冠以不同的大写拉丁字母来区别这些曲面.

下面是各种偏导向量中几个有代表性的记号，例如：

$$uv_u := \frac{\partial(uv)}{\partial u},$$

$$uv_{uv} := \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}(uv),$$

$$uv_{uu} := \frac{\partial^2}{\partial u^2}(uv),$$

$$0v_u := \frac{\partial(uv)}{\partial u}\Big|_{u=0},$$

$$1v_{uu} := \frac{\partial^2(uv)}{\partial u^2}\Big|_{u=1},$$

$$01_{uv} := \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}(uv)\Big|_{u=0,v=1},$$

如此等等.

考察记号 uv_u，在这里 v 被理解为固定的，偏导向量是对变数 u 来计算，因此，它表示曲面上 u-线的切向量. 同样地，uv_v 可看作是 v-线上的切向量. 所以，当 uv_u 与 uv_v 不共线时，$uv_u \times uv_v$ 可以代表曲面 uv 的法向量.

特别地，$0v_u$ 与 $1v_u$ 分别是在边界 $0v$ 与 $1v$ 的各点上 u-线的导向量，称之为**边界斜率**；另一对边界斜率是 $u0_v$ 及 $u1_v$. 而 $0v_{uu}$，$1v_{uu}$，$u0_{vv}$，$u1_{vv}$ 则称为**边界曲率**，这只是一个名称，与微分几何中的“曲率”的概念是有区别的.

§2 简单曲面片

设想给定了两条空间曲线

$$[x_0(u), y_0(u), z_0(u)],$$

$$[x_1(u), y_1(u), z_1(u)],$$

$0 \leqslant u \leqslant 1$，分别记作 $u0$ 及 $u1$. 考察双参数的向量值函数

$$(1-v)u0 + v(u1) \tag{4}$$

$0 \leqslant u$，$v \leqslant 1$. 向量值函数(4)表示一张曲面片，由于 $v=0$ 时我们由(4)得出 $u0$，$v=1$ 时得出 $u1$，可见 (4) 以给定的两条曲线为一对边界. 对于任何固定的值 $u \in [0, 1]$，(4) 表示一段直线，所以(4)是一张“直纹面”，它的另一对边界分别是直线段 $(1-v)00 + v01$ 及 $(1-v)10 + v11$.

如果给定了两对曲线

$$u0,\ u1, \qquad 0 \leqslant u \leqslant 1,$$

$$0v,\ 1v, \qquad 0 \leqslant v \leqslant 1,$$

我们希望作出一张曲面片，使得这两对曲线成为这个曲面的两

对边界，这也是容易办到的. 自然地，这 4 条曲线应当连接起来，合成一条封闭的空间曲线，也就是说，必须有

$$\lim_{u\to 0} u0 = \lim_{v\to 0} 0v,$$
$$\lim_{u\to 1} u0 = \lim_{v\to 0} 1v,$$
$$\lim_{u\to 0} u1 = \lim_{v\to 1} 0v,$$
$$\lim_{u\to 1} u1 = \lim_{v\to 1} 1v.$$

仿照（4）作出

$$(1-u)0v + u(1v), \tag{5}$$

这也是一张空间曲面片，它的一对边界是 $0v$ 与 $1v$，但另外一对边界分别是直线段

$$(1-u)00 + u10 \text{ 及 } (1-u)01 + u11.$$

所以，把(4)与(5)直接迭加并不能给出正确的结果，这是因为这时每一条边界上都多余了一段直线. 这 4 段直线正好是以 00，01，10，11 这 4 个角点所确定的“双线性曲面”

$$[1-u \quad u]\begin{bmatrix} 00 & 01 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix} \tag{6}$$

的边界. 因此，把(4)与(5)迭加之后再减去双线性曲面(6)便是我们所需要的结果：

$$S(uv) := [1-u \quad u]\begin{bmatrix} 0v \\ 1v \end{bmatrix} + [u0 \quad u1]\begin{bmatrix} 1-v \\ u \end{bmatrix}$$
$$- [1-u \quad u]\begin{bmatrix} 00 & 01 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}. \tag{7}$$

由(7)给出的曲面 $S(uv)$ 叫做**简单曲面片**，它插值于 4 条给定的边界曲线.

Coons 本人把曲面(7)写成更紧凑的矩阵形式. 首先，容易直接验证下列矩阵等式

$$[1-u,u]\begin{bmatrix}0v\\1v\end{bmatrix}=[1\quad 1-u\quad u]\begin{bmatrix}0&0&0\\0v&0&0\\1v&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1-v\\v\end{bmatrix},$$

$$[u0\quad u1]\begin{bmatrix}1-v\\v\end{bmatrix}=[1\quad 1-u\quad u]\cdot$$

$$\begin{bmatrix}0&u0&u1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1-v\\v\end{bmatrix},$$

$$[1-u\quad u]\begin{bmatrix}00&01\\10&11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-v\\v\end{bmatrix}$$

$$=[1\quad 1-u\quad u]\begin{bmatrix}0&0&0\\0&00&01\\0&10&11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1-v\\v\end{bmatrix},$$

由此立知

$$S(uv)=[1\quad 1-u\quad u]\begin{bmatrix}0&u0&u1\\0v&-00&-01\\1v&-10&-11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1-v\\v\end{bmatrix},$$

上式还可以进一步改写为

$$S(uv)=-[-1\quad 1-u\quad u]\cdot$$

$$\begin{bmatrix}0&u0&u1\\0v&00&01\\1v&10&11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1-v\\v\end{bmatrix}. \tag{8}$$

在（8）的双方令 $v=0$，得到

$$S(u0)=-[-1\quad 1-u\quad u]\begin{bmatrix}0&u0&u1\\00&00&01\\10&10&11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$= -[-1, 1-u, u]\begin{bmatrix} u0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = u0,$$

同理可得

$$S(u1) = u1, S(0v) = 0v, S(1v) = 1v,$$

这表明曲面 $S(uv)$ 确实包含了 4 条给定的曲线为自己的 4 条边界曲线.

这里提出以下三点注意.

1. 在上述推导中涉及的一切方阵，都是以向量为元素的方阵，其中单个的 0 应理解为零向量；

2. 公式(8)右边的行向量与列向量，若不计较变量记号的差别，它们是互为转置的；

3. 公式(8)右边的三阶方阵仅涉及曲面的边界信息：第一行中包含着一对边界曲线，第一列中包含着另一对边界曲线；右下角那个二阶子方阵由曲面片的 4 个角点组成.

由于简单曲面片只是包含着 4 条给定的边界，对于应用来说似乎是太简单了，但是它首先提出了“超限插值”的概念，为插值与逼近理论带来了新的思想. 过去的插值，多发生在离散的点上，而简单曲面片插值于 4 条曲线，曲线上有无穷多个点，这种类型的插值也就被称为**超限插值**. 简单曲面片的矩阵表示(8)，也为今后的推广提供了方便的途径.

§3 具有指定边界和边界斜率的曲面片

设想除了给定四条边界曲线

$$u0,\ u1,\ 0v,\ 1v$$

之外，还给定了这些边界曲线上的边界斜率

$$u0_v,\ u1_v,\ 0v_u,\ 1v_u,$$

我们试图求出包含所有这些信息的曲面．为了这一目的，需要用到第二章公式(7)中给出的三次 Hermite 插值基函数 F_0, F_1，G_0，G_1．起着重要作用的乃是由矩阵

$$\begin{bmatrix} F_0(0) & F_1(0) & G_0(0) & G_1(0) \\ F_0(1) & F_1(1) & G_0(1) & G_1(1) \\ F_0'(0) & F_1'(0) & G_0'(1) & G_1'(0) \\ F_0'(1) & F_1'(1) & G_0'(1) & G_1'(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

所表示的**基性质**．由基性质可知：曲面

$$[u0 \quad u1 \quad u0_v \quad u1_v]\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ G_0 \\ G_1 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

其中单列矩阵中的基函数以 v 为变数，包含着一对边界 $u0$，$u1$ 及它们的边界斜率 $u0_v$，$u1_v$．类似地，曲面

$$[F_0 \quad F_1 \quad G_0 \quad G_1]\begin{bmatrix} 0v \\ 1v \\ 0v_u \\ 1v_u \end{bmatrix}, \tag{11}$$

其中单行矩阵中的基函数以 u 为变数，包含着另一对已给的边界 $0v$，$1v$ 以及相应的边界斜率．但是，若只是把曲面(10)和(11)简单地迭加起来，并不能给出所需的结果，这是因为(10)当 $u=0$ 时给出了边界

$$[00 \quad 01 \quad 00_v \quad 01_v]\begin{bmatrix}F_0\\F_1\\G_0\\G_1\end{bmatrix}, \tag{12}$$

而当 $u=1$ 时给出了边界

$$[10 \quad 11 \quad 10_v \quad 11_v]\begin{bmatrix}F_0\\F_1\\G_0\\G_1\end{bmatrix}; \tag{13}$$

在边界（12）与（13）上分别产生出边界斜率

$$[00_u \quad 01_u \quad 00_{uv} \quad 01_{uv}]\begin{bmatrix}F_0\\F_1\\G_0\\G_1\end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$[10_u \quad 11_u \quad 10_{uv} \quad 11_{uv}]\begin{bmatrix}F_0\\F_1\\G_0\\G_1\end{bmatrix}. \tag{15}$$

为了把这 4 个量的作用抵消，应当从(10)与(11)的和中减去：(12)$\times F_0(u)+$(13)$\times F_1(u)+$(14)$\times G_0(u)+$(15)$\times G_1(u)$；若用矩阵来表示这 4 项之和，那就是

$$[F_0F_1G_0G_1]\left[\begin{array}{cc:cc}00 & 01 & 00_v & 01_v\\10 & 11 & 10_v & 11_v\\ \hdashline 00_u & 01_u & 00_{uv} & 01_{uv}\\10_u & 11_u & 10_{uv} & 11_{uv}\end{array}\right]\begin{bmatrix}F_0\\F_1\\G_0\\G_1\end{bmatrix} \tag{16}$$

由(16)关于文字 u，v 的对称性可知，当 $v=0$ 及 $v=1$ 时，(16)正好也抵消了曲面(11)带来的多余的边界和边界斜率，这就是说，曲面

$$T(uv):=[F_0F_1G_0G_1]\begin{bmatrix}0v\\1v\\0v_u\\1v_u\end{bmatrix}+[u0\quad u1\quad u0_v\quad u1_v]\begin{bmatrix}F_0\\F_1\\G_0\\G_1\end{bmatrix}$$

$$-[F_0F_1G_0G_1]\begin{bmatrix}00 & 01 & 00_v & 01_v\\10 & 11 & 10_v & 11_v\\00_u & 01_u & 00_{uv} & 01_{uv}\\10_u & 11_u & 10_{uv} & 11_{uv}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_0\\F_1\\G_0\\G_1\end{bmatrix} \tag{18}$$

插值于 4 条给定的边界以及各边界上的斜率，这是通过(18)可以直接检验的，例如说

$$T(u0)=[F_0F_1G_0G_1]\begin{bmatrix}00\\10\\00_u\\10_u\end{bmatrix}+[u0\quad u1\quad u0_v\quad u1_v]\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$-[F_0F_1G_0G_1]\begin{bmatrix}00 & 01 & 00_v & 01_v\\10 & 11 & 10_v & 11_v\\00_u & 01_u & 00_{uv} & 01_{uv}\\10_u & 11_u & 10_{uv} & 11_{uv}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=u0,$$

同理可证

$$T(u1)=u1\ ,T(0v)=0v\ ,T(1v)=1v.$$

再转来讨论边界斜率，在(18)双方对 v 求导，得到

$$\frac{\partial T(uv)}{\partial v}=[F_0F_1G_0G_1]\begin{bmatrix}0v_v\\1v_v\\0v_{uv}\\1v_{uv}\end{bmatrix}+[u0\quad u1\quad u0_v\quad u1_v]\begin{bmatrix}F_0'\\F_1'\\G_0'\\G_1'\end{bmatrix}$$

$$-[F_0F_1G_0G_1]\begin{bmatrix}00 & 01 & 00_v & 01_v\\ 10 & 11 & 10_v & 11_v\\ 00_u & 01_u & 00_{uv} & 01_{uv}\\ 10_u & 11_u & 00_{uv} & 01_{uv}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_0'\\ F_1'\\ G_0'\\ G_1'\end{bmatrix},$$

用 $v=0$ 代入上式右边，得

$$[F_0F_1G_0G_1]\begin{bmatrix}00_v\\ 10v\\ 00_{uv}\\ 10_{uv}\end{bmatrix}+[u0\quad u1\quad u0_v\quad u1_v]\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$-[F_0F_1G_0G_1]\begin{bmatrix}00_v\\ 10_v\\ 00_{uv}\\ 10_{uv}\end{bmatrix}=u0_v,$$

所以得到了

$$\frac{\partial T(u0)}{\partial v}=u0_v,$$

用类似的计算还可以得到其他三个等式

$$\frac{\partial T(u1)}{\partial v}=u1_v$$

$$\frac{\partial T(0v)}{\partial u}=0v_u,$$

$$\frac{\partial T(1v)}{\partial u}=1v_u.$$

这就证明了曲面 $T(uv)$不但是插值于 4 条给定的边界，同时也插值于 4 个给定的边界斜率.

与前节一样，通过一系列的简单计算，可以把曲面 (18) 表示成为更加紧凑的矩阵形式：

$$T(uv)=-[-1F_0F_1G_0G_1]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & u0 & u1 & u0_v & u1_v \\ 0v & 00 & 01 & 00_v & 01_v \\ 1v & 10 & 11 & 10_v & 11_v \\ 0v_u & 00_u & 01_u & 00_{uv} & 01_{uv} \\ 1v_u & 10_u & 11_u & 10_{uv} & 11_{uv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ F_0 \\ F_1 \\ G_0 \\ G_1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

公式(19)的右边的 5×5 方阵中元素的分布有很明显的规律性：方阵的第一行、第一列由给定的两对边界与相应的边界斜率组成，其余 4 个 2×2 的子块中的元素分布总是呈

$$\begin{bmatrix} 00 & 01 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$$

的形状，但须添加适当的下角标. 具体地说，每个元素的下角标由它所在的行的第一个元素、所在列的第一个元素的下角标来确定. 这 4 个 2×2 子块所含的只是 4 个角点上的信息.

认清了这种规律性，可以很容易地推广前节和本节的结果.

§4 更高级的 Coons 曲面

如果不但给定了 4 条边界曲线、边界斜率，而且又给定了 4 个边界曲率，即再给定

$$u0_{vv},\ u1_{vv},\ 0v_{uu},\ 1v_{uu},$$

能不能作出一张曲面包容所有这一切信息？回答是肯定的. 这时需要用到 5 次 Hermite 插值基函数 F_0、F_1，G_0，G_1，H_0，H_1（注意，这里的 F_0，F_1，G_0，G_1 与 § 3 中的那 4 个三次多项式是不同的），它们满足基性质

$$\begin{bmatrix} F_0(0) & F_1(0) & G_0(0) & G_1(0) & H_0(0) & H_1(0) \\ F_0(1) & F_1(1) & G_0(1) & G_1(1) & H_0(1) & H_1(1) \\ F_0'(0) & F_1'(0) & G_0'(0) & G_1'(0) & H_0'(0) & H_1'(0) \\ F_0'(1) & F_1'(1) & G_0'(1) & G_1'(1) & H_0'(1) & H_1'(1) \\ F_0''(0) & F_1''(0) & G_0''(0) & G_1''(0) & H_0''(0) & H_1''(0) \\ F_0''(1) & F_1''(1) & G_0''(1) & G_1''(1) & H_0''(1) & H_1''(1) \end{bmatrix} = I_6,$$

其中 I_6 表示 6×6 的单位方阵，即主对角线上的元素为 1 其余元素为 0 的方阵. 在第二章中，利用控制多边形的几何特征，我们定出了三次 Hermite 插值基函数；完全相同的技巧可以使我们通过 Bernstein 基函数来确定 5 次 Hermite 插值基函数，建议读者当作习题来做. 在当前的讨论中，我们并不需要这 6 个 5 次多项式的具体表达式，只需要它们的基性质便足以够用.

类比着公式 (19)，可以予见所需的曲面应是

$$K(uv):=-[-1F_0F_1G_0G_1H_0H_1]M\begin{bmatrix} -1 \\ F_0 \\ F_1 \\ G_0 \\ G_1 \\ H_0 \\ H_1 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

其中 7×7 方阵

$$M:=\left[\begin{array}{c:cc:cc:cc} 0 & u0 & u1 & u0_v & u1_v & u0_{vv} & u1_{vv} \\ \hdashline 0v & 00 & 01 & 00_v & 01_v & 00_{vv} & 01_{vv} \\ 1v & 10 & 11 & 10_v & 11_v & 10_{vv} & 11_{vv} \\ \hdashline 0v_u & 00_u & 01_u & 00_{uv} & 01_{uv} & 00_{uvv} & 01_{uvv} \\ 1v_u & 10_u & 11_u & 10_{uv} & 11_{uv} & 10_{uvv} & 11_{uvv} \\ \hdashline 0v_{uu} & 00_{uu} & 01_{uu} & 00_{uuv} & 01_{uuv} & 00_{uuvv} & 01_{uuvv} \\ 1v_{uu} & 10_{uu} & 11_{uu} & 10_{uuv} & 11_{uuv} & 10_{uuvv} & 11_{uuvv} \end{array}\right] \quad (21)$$

M 的第一行、第一列包含着各条边界的信息，其中有边界曲线、边界斜率、边界曲率；其余 9 个二阶子块只包含角点信息，每一块中元素的分布有着相同的模式.

通过公式(20)可以直接验证曲面 $K(uv)$ 的确插值于 12 个给定的边界信息，验证的过程也并不繁琐，读者自己可以一试.

有了以上的认识，再想要作出包容更多边界信息的曲面，也成了轻而易举之事.

§5 双三次曲面

作为非职业数学家的 Coons 彻底地解决了给定在 4 条边界上任意高级的边界信息的插值问题，表达式 (8)、(19)、(20) 与 (21) 又是那么精美，使人们不得不叹服他对于“插值与逼近”的数学理论的重大贡献. 事实上，Coons 的超限插值的理论创造出一个崭新的方向，引起了众多的讨论. 可惜的是，这些理论在 CAGD 的实际问题中并没有大的用处，原因是从实际问题中提供不出那么多的边界信息.

在 CAGD 中，用得最多的倒是由 (16) 给出的曲面

$$C(uv):=[F_0F_1G_0G_1]\left[\begin{array}{cc|cc} 00 & 01 & 00_v & 01_v \\ 10 & 11 & 10_v & 11_v \\ \hline 00_u & 01_u & 00_{uv} & 01_{uv} \\ 10_u & 11_u & 10_{uv} & 11_{uv} \end{array}\right]\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ G_0 \\ G_1 \end{bmatrix} \qquad (22)$$

对这曲面 $C(uv)$ 来说，若固定 u 它对 v 是三次的，固定 v 时则对 u 是三次的，所以被称之为**双三次曲面**. 它所需要的信息全部出现在 (22) 右边的 4×4 方阵中，所以这个方阵叫做**角点信息方阵**，它共含 16 个向量，可分成 4 个 2 阶子块. 左上角那个

子块由 4 个角点的位置向量组成，左下角与右上角那两个二阶子块是角点上的两组切向量. 所以这三个 2 阶子块有着明确的几何意义. 但是，其中右下角那个 2 阶子块

$$\begin{bmatrix} 00_{uv} & 01_{uv} \\ 10_{uv} & 11_{uv} \end{bmatrix}$$

没有确切的几何意义，它们不是几何不变的，其中的 4 个向量叫做角点上的**扭向量**.

直接的计算表明：$C(uv)$ 插值于这 16 个角点信息，也就是说

$$C(10) = 10,$$

$$\frac{\partial C(10)}{\partial u} = 10_u,$$

$$\frac{\partial^2 C(10)}{\partial u \partial v} = 10_{uv},$$

如此等等.

双三次曲面与各角点信息之间的关系可见图 9.2.

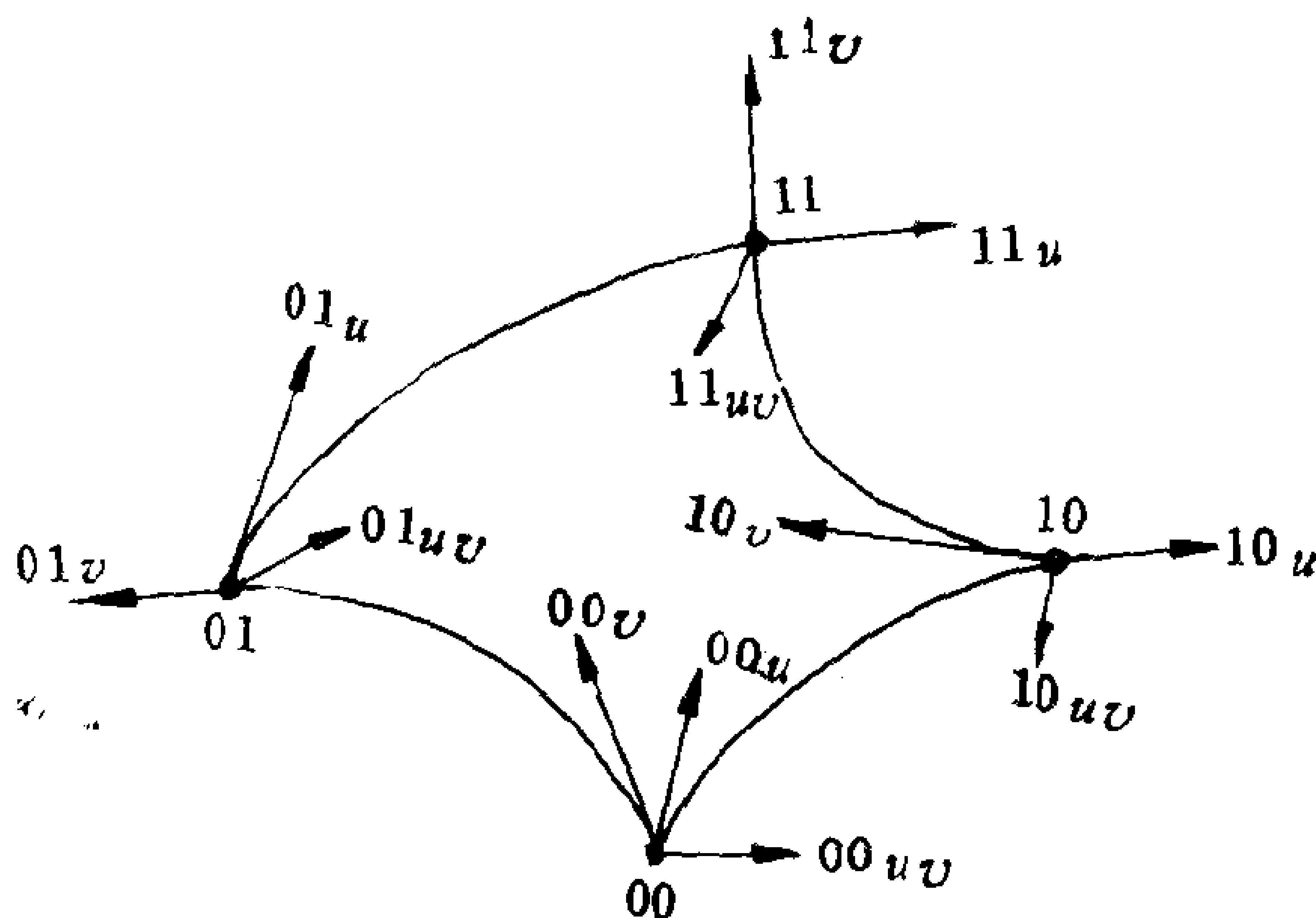


图 9.2 双三次曲面

双三次曲面是十分灵活的，调整这 16 个向量中的任何一个，都会引起曲面的变化. 在常见的设计和逼近曲面中，双三次曲面足以够用. CAGD 中人们常常提到的"Coons 曲面"，正是 Coons 的双三次曲面，而并非 § 2、§ 3、§ 4 中那些精彩的成果. 当然，为了让双三次曲面在 CAGD 中发挥更大的作用，还得解决两张双三次曲面的光滑拼接的问题.

现在来计算双三次曲面的边界斜率，在（22）双方对 v 求导，得到

$$\frac{\partial C(uv)}{\partial v}=[F_0F_1G_0G_1]\begin{bmatrix}00 & 01 & 00_v & 01_v\\ 10 & 11 & 10_v & 11_v\\ 00_u & 01_u & 00_{uv} & 01_{uv}\\ 10_u & 11_u & 10_{uv} & 11_{uv}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_0'\\ F_1'\\ G_0'\\ G_1'\end{bmatrix},$$

于是边界斜率

$$\frac{\partial C(u1)}{\partial v}=[F_0F_1G_0G_1]\begin{bmatrix}01_v\\ 11_v\\ 01_{uv}\\ 11_{uv}\end{bmatrix}.$$

设想另有一双三次曲面

$$A(uv):=[F_0F_1G_0G_1]\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} & \boldsymbol{a}_{14}\\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} & \boldsymbol{a}_{24}\\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{33} & \boldsymbol{a}_{34}\\ \boldsymbol{a}_{41} & \boldsymbol{a}_{42} & \boldsymbol{a}_{43} & \boldsymbol{a}_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}_0\\ \boldsymbol{F}_1\\ \boldsymbol{G}_0\\ \boldsymbol{G}_1\end{bmatrix},\qquad (23)$$

若让它与 $C(uv)$ 有公共的边界，例如说令

$$A(u0)=C(u1),$$

必须而且只须

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{11} \\ \boldsymbol{a}_{21} \\ \boldsymbol{a}_{31} \\ \boldsymbol{a}_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 01 \\ 11 \\ 01_u \\ 11_u \end{bmatrix};$$

如果再令

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{a}_{23} \\ \boldsymbol{a}_{33} \\ \boldsymbol{a}_{43} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 01_v \\ 11_v \\ 01_{uv} \\ 11_{uv} \end{bmatrix},$$

这里 λ 为任何正实数，那么就有

$$\frac{\partial A(u0)}{\partial v} = \lambda \frac{\partial C(u1)}{\partial v}.$$

这时不论（23）的右边 4×4 方阵的第二列、第四列的的向量如何选择，那么曲面 C 与曲面 A 不但有公共的边界，而且在这条公共边界上有共同的切平面(因为在这条公共边界上每一点处，两张曲面的法向量是共线的).

§6 结束语

Coons 与 Bézier 同是 CAGD 的奠基人，Coons 曲面是 CAGD 的基本内容之一. Coons 的最伟大的贡献，从数学理论方面来看，应当是他提出了超限插值的理论，为插值和逼近开拓了新的领域. 他成功地解决了给定曲面四条边界上任意高级的信息之后，如何来求出插值曲面，他求出的曲面的显式表达又是那么简洁精美. 但是，在 CAGD 中所用到的 Coons 曲面，只不过是双三次曲面，这类曲面只需要给出曲面 4 个角点上的信息，这些信息除了扭向量之外，都有明确的几何意义. 如何处

理扭向量，直到目前也没有出现令人满意的办法.

把 Coons 曲面同 Bézier 曲面作一比较，可以看到在 Coons 的理论中，没有与控制网相对应的东西，因此它与几何的结合就远远不如 Bézier 方法同几何的关系那么密切. Coons 曲面谈不上凸包性质，更不用说保形性、保凸性之类的性质，这些都是 Coons 曲面的缺陷. 现实情况表明，在 CAGD 的专门杂志上，对 Bézier 方法的讨论和研究现今已占到了绝大多数的篇幅，这同时也说明了为什么本书只是在最后一章中简要地介绍了 Coons 的工作.

文　献

Andersson, L-E, Chang Gengzhe & Elfving T. (1995), Criteria for Copositive Matrices using Simplices and Barycentric Coordinates, Linear Algebra & its Applications, **220** (1995) 9-30.

Bezier, P. (1986), *The Mathematical Basis of the UNISURF CAD System*, Butterworths, 1986

Boehm, W., Farin, G. E & Kahmann, J. (1985), A survey of curve and surface methods in CAGD, Computer Aided Geometric Design, **1** (1984) 1-60.

Chang Gengzhe & Davis, P. J. (1984), The Convexity of Bernstein Polynomials over Triangles, J. of Approx. Theory, **40** (1984) 11-28.

Chang Gengzhe & Feng Yuyu (1984), An improved condition for the convexity of the Bernstein-Bezier surfaces over triangles, Computer Aided Geometric Design, **1** (1984) 279-283.

Chang Gengzhe & Feng Yuyu (1985), A new proof of the convexity of the Bernstein polynomials over triangles, Chinese Annals of Math., Series **B 6** (1985) 141-146.

Chang Gengzhe & Feng Yuyu (1986), Limit of iterates for Bernstein polynomials defined on higher di-

mensional domains, Kexue Tongbao, **31** (1986) (157-160).

Chang Gengzhe & Zhang Jinzhong (1990), Converse theorems of convexity for Bernstein polynomials over triangles, J. Approx. Theory, **61** (1990) 265-278.

Chang Gengzhe & sederberg, T. W. (1994), Nonnegative quadratic Bezier triangular patches, Computer Aided Geometric Design, **11** (1994) 113-116.

Coons, S. A. (1967), Surfaces for computer aided design of space forms, MIT Project MAC-TR-41, 1967.

Dahmen, W. (1991), Convexity and Bernstein-Bezier Polynomials, Curves and Surfaces, Academic Press, Boston, 107-134.

Dahmen, W, & Micchelli C. A. (1990), Convexity and Bernstein polynomials on k-simploids, Acta Mathematicae Applicatae Sinica, **6** (1990) 50-66.

Davis, P. J. (1973), *Interpolation and Approximation*, Blaisdell Publishing Company, 1963.

Farin, G. E. (1980), Bezier polynomials over triangles and the construction of piecewise C^r polynomials, TR/91, Dept. of Mathematics, Brunel University, Uxbridge, UK.

Farin, G. E. (1986) Triangular Bernstein-Bezier patches, Computer Aided Geometric Design, **3** (1983) 127.

Faux, I. D. & Pratt, M. J. (1979), *Computational Geometry for Design and Manufacture*, Ellis Horwood Lim-

ited, Chichester, 1979.

Feng Yuyu, Chen Falai & Zhou Hongling (1994), The invarience of weak convexity conditions of B-nets with respect to subdivision, Computer Aided Geometric Design, **11** (1994) 97-107.

Forrest, A. R. (1972), Interactive interpolation and approximation by Bezier Polynomials, Computer J. **15** (1972) 71-79.

Goodman, T. N. T. (1989), Shape preserving Representations, Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design, Academic Press, 333-351.

Grandine, T. A. (1989), On convexity of piecewise polynomial functions on triangulations, Computer Aided Geometric Design, **6** (1989) 181-187.

Hadeler, K. P. (1983), On Copositive Matrices, Linear Algebra & its Applications, **49** (1983) 79-89.

Kelisky, R. P. & Rivlin, T. J. (1967), Pacific J. of Math., **21** (1967) 3: 511-520.

KosmaK L. (1960), A note on Bernstein polynomials of a convex function, Math. (Cluj) **2** (1960) 281-282.

Li Ping & Feng Yuyu (1993), Critera for copositive Matrices of Order Four, Linear Algebra & its Applications, **194** (1993) 109-124.

Micchelli, C. A. & Pinkus A. (1989), Some Remarks on Nonnegative Polynomials on Polyhedra, Probability, Statistics and Mathematics, 163-185.

Nadler, E. (1992), Nonnegativity of bivariate quadratic func-

tions on a triangle, Computer Aided Geometric Design, **9** (1992) 195-205.

Lorentz, G. G. (1953), Bernstein Polynomials, Mathematical Expositions, No. 8.

Sauer, T. (1992), On the Maximum Principle of Bernstein Polynomials on a Simplex, J. Approx. Theory, **71** (1992) 121-122.

Su Buchin & Liu Dingyuan (1989), *Computational Geometry-Curve and Surface modeling*, Academic Press, INC. 1989.

Wang Jiaye (1981), Shape Classification of the Parametric Cubic Curve and Parametric B-spline Cubic Curve, Computer Aided Design, **13** (1981) 199-206.

Wang Zheng-bin & Liu Qi-ming (1988), An improved condition for the convexity and positivity of Bernstein-Bezier surfaces over triangles, Computer Aided Geometric Design, **5** (1988) 269-275.

Zheng Jin-jin (1993), The convexity of parametric Bezier triangular patches of degree 2, Computer Aided Geometric Design, **10** (1993) 521-530.

Ziegler, Z. (1968), Linear approximation and generalized convexity, J. Approx. theory, **1** (1986) 420-433.